

八年级上册数学第4章实数测试卷

姓名：_____ 班级：_____ 学号：_____

一、选择题（每小题3分，共18分）

1、下列计算正确的是（ ）

- A. $\sqrt[3]{8} = \pm 2$ B. $(-2)^3 = -8$ C. $\sqrt{4} = \pm 2$ D. $-2^2 = 4$

2、若 $\sqrt{15-n}$ 是整数，则正整数 n 不可能是（ ）

- A. 6 B. 9 C. 11 D. 14

3、一个正数的两个平方根分别为 $a+3$ 和 $4-2a$ ，则这个正数为（ ）

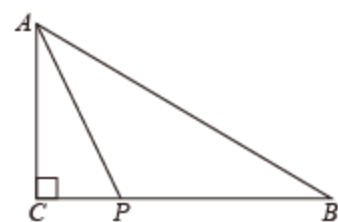
- A. 7 B. 10 C. 49 D. 100

4、下列说法中，正确的是（ ）

- A. ± 3 是 $(-3)^2$ 的算术平方根 B. -3 是 $(-3)^2$ 的算术平方根

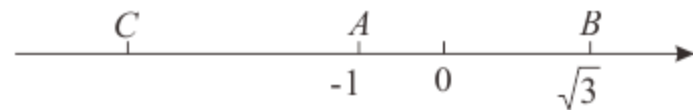
- C. 9的平方根是 -3 D. -3 是9的一个平方根

5、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $AC = 1$ ，动点 P 在 BC 边上，则 AP 的长不可能是（ ）



- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{7}{3}$

6、如图，数轴上 A ， B 两点表示的数分别是 -1 和 $\sqrt{3}$ ，点 B 关于点 A 的对称点为 C ，则点 C 所表示的数为（ ）



- A. $-2-\sqrt{3}$ B. $-2+\sqrt{3}$ C. $-1-\sqrt{3}$ D. $-1+\sqrt{3}$

二、填空题（每小题2分，共20分）

7若 $2x^2 - 18 = 0$ ，则 $x =$ _____.

8若 $|a-b+1|$ 与 $\sqrt{a+2b+4}$ 互为相反数，则 $(a-b)^{2015} =$ _____.

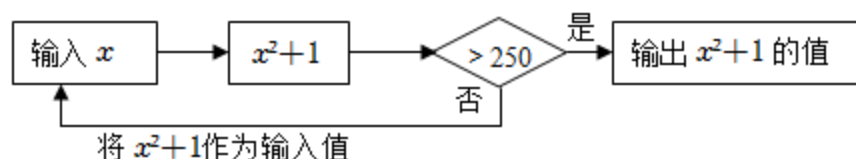
9若 $a < \sqrt{13} < b$ ，且 a, b 是两个连续整数，则 $a+b$ 的值为_____.

10.用两块面积为 5dm^2 的小正方形地砖拼成一块大正方形地砖，则这块大正方形地砖的长为_____.

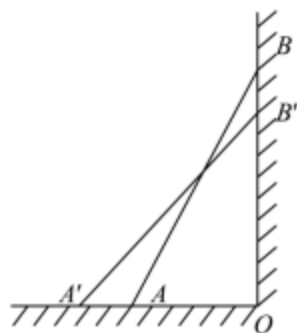
11. 若 x, y 为实数, 且 $x^3y^3 = -216$, 当 $x \leq -2$ 时, y 的取值范围是_____.

12. 比较大小: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ _____ $\sqrt{5}$. (填 $>$, $<$, $=$)

13. 按下面程序计算, 若开始输入 x 的值为大于 1 的实数, 最后得到的结果为 290, 则符合条件的所有 x 的值是_____.



14. 如图, 梯子 AB 靠在墙上, 梯子的底端 A 到墙根 O 的距离为 2 米, 梯子的顶端 B 到地面的距离为 7 米. 现将梯子的底端 A 向外移动到 A' , 使梯子的底端 A' 到墙根 O 的距离等于 3 米, 同时梯子的顶端 B 下降至 B' , 那么 BB' 的值_____ 1 米 (填 $>$, $<$, $=$)

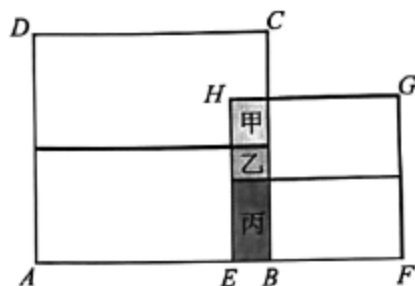


15. 实数 a, b, c 在数轴上的位置如图所示, 则 $\sqrt{a^2} + |a-b| - \sqrt{(a-c)^2} + \sqrt[3]{(b+c)^3} =$ _____.



16. 如图, 正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$ 分别由两张相同的长方形纸片无缝拼接而成, 现将其摆放在桌面上, 如图所示, 重合部分为甲、乙、丙, 其中乙为正方形, 记甲、丙的面积分别为 $S_{\text{甲}}, S_{\text{丙}}$, 若 $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{丙}}} = \frac{3}{5}$,

且桌面被所有纸片覆盖区域的面积为 276cm^2 , 则乙的面积为_____ cm^2 .



三、解答题 (共 62 分)

17. (8 分) 计算下列各式的 x 的值;

(1)已知 $(x-1)^2=4$ ，求 x 的值．

$$(2)\frac{1}{2}(x-1)^3=-32$$

18. (8分) 计算：

$$(1)(-2)^3 \times \sqrt{(-4)^2} + \sqrt[3]{(-4)^3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \sqrt[3]{27}$$

$$(2)|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+|\sqrt{3}-2|+|2-\sqrt{5}|$$

19. (8分) 阅读材料，完成下列任务：

因为无理数是无限不循环小数，因此无理数的小数部分我们不可能全部地写出来比如： π 、 $\sqrt{2}$ 等，而常用的“...”或者“ $\approx$ ”的表示方法都不够百分百准确．

材料一： $\because \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$ ，即 $2 < \sqrt{7} < 3$ ，

$$\therefore 1 < \sqrt{7} - 1 < 2.$$

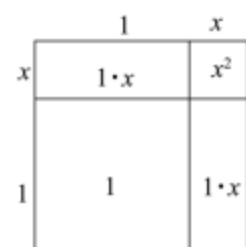
$\therefore \sqrt{7} - 1$ 的整数部分为1．

$\therefore \sqrt{7} - 1$ 的小数部分为 $\sqrt{7} - 2$ ．

材料二：我们还可以用以下方法求一个无理数的近似值．

我们知道面积是2的正方形的边长是 $\sqrt{2}$ ，易知 $\sqrt{2} > 1$ ，因此可设 $\sqrt{2} = 1 + x$ ，可画出如图示意图．由

图中面积计算， $S_{\text{正方形}} = x^2 + 2 \times 1 \cdot x + 1$ ，另一方面由题意知 $S_{\text{正方形}} = 2$ ，所以 $x^2 + 2 \times 1 \cdot x + 1 = 2$ ．



略去 x^2 ，得方程 $2x+1=2$ ，解得 $x=0.5$ ，即 $\sqrt{2} \approx 1.5$ ．

解决问题：

(1)利用材料一中的方法，求 $\sqrt{85}$ 的小数部分；

(2)利用材料二中的方法，探究 $\sqrt{5}$ 的近似值．（画出示意图，标明数据，并写出求解过程）

20.（8分）请阅读下列材料：

我们可以通过以下方法求代数式的 x^2+2x-3 最小值．

$$x^2+2x-3=x^2+2x\cdot 1+1^2-1^2-3=(x+1)^2-4$$

$$\because (x+1)^2 \geq 0$$

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时， x^2+2x-3 有最小值 -4

请根据上述方法，解答下列问题：

(1) $x^2+2\sqrt{3}x+5=x^2+2\times\sqrt{3}x+(\sqrt{3})^2+2=(x+a)^2+b$ ，则 $a=$ _____， $b=$ _____；

(2)若代数式 $x^2-2kx+7$ 的最小值为3，求 k 的值．

21.（10分）阅读材料，完成下列任务：

材料1：因为无理数是无限不循环小数，所以无理数的小数部分我们不可能全部写出来．比如： π ， $\sqrt{2}$ 等，而常用的“...”或者“ $\approx$ ”的表示方法都不够百分百准确．

材料2：2.5的整数部分是2，小数部分是0.5，小数部分可以看成是 $2.5-2$ 得来的．

材料3：任何一个无理数，都夹在两个相邻的整数之间，如 $2<\sqrt{5}<3$ ，是因为 $\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$ ．

根据上述材料，回答下列问题：（参考值： $\sqrt{3}\approx 1.732$ ）

(1) $\sqrt{17}$ 的整数部分是_____，小数部分是_____．

(2) $5+\sqrt{3}$ 也是夹在相邻两个整数之间的，可以表示为 $a<5+\sqrt{3}<b$ ，求 $a+b$ 的值．

(3)已知 $3+\sqrt{3}=x+y$ ，其中 x 是整数，且 $0 < y < 1$ ，求 $x+4y$ 的近似值（精确到 0.1）。

22.（10 分）根据下表回答问题：

x	17	17.1	17.2	17.3	17.4	17.5	17.6	17.7	17.8
x^2	289	292.41	295.84	299.29	302.76	306.25	309.76	313.29	316.84

(1)309.76 的平方根是_____；

(2) $\sqrt{2.9584} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $-\sqrt{30625} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\pm\sqrt{3.1329} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(3)设 $\sqrt{300}$ 的整数部分为 a ，求 $3a-2$ 的平方根。

23.（10 分）已知一列数： $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n$ ，满足对为一切正整数 n 都有

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} = \frac{1}{2\sqrt{a_1 a_2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} = \frac{1}{2\sqrt{a_2 a_3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} = \frac{1}{2\sqrt{a_3 a_4}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_4}} = \frac{1}{2\sqrt{a_4 a_5}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n}} = \frac{1}{2\sqrt{a_n a_{n+1}}} \text{ 成立, 且 } a_1 = 1.$$

(1)求 a_2, a_3 的值；

(2)猜想第 n 个数 a_n （用 n 表示）；

(3)求 $\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \sqrt{a_3 a_4} + \dots + \sqrt{a_{2021} a_{2022}}$ 的值。

参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

一、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1、B

【解析】解：A、 $\sqrt[3]{8}=2$ ，故本选项错误；

B、 $(-2)^3=-8$ ，故本选项正确；

C、 $\sqrt{4}=2$ ，故本选项错误；

D、 $-2^2=-4$ ，故本选项错误；

故选：B.

2、B

【解析】解： $\because \sqrt{15-n}$ 是整数， n 为正整数，

$\therefore 15-n>0$ ，解得： $n<15$ ，

$\because \sqrt{15-n}$ 是整数，

$\therefore n$ 的值为：6，11，14，

故选：B.

3、D

【解析】解： $\because$ 一个正数的两个平方根分别为 $a+3$ 和 $4-2a$ ，

$\therefore a+3+4-2a=0$ ，

解得： $a=7$ ，

$\therefore$ 这个正数为： $(a+3)^2=10^2=100$ ，

故选 D.

4、D

【解析】解：A、3 是 $(-3)^2$ 的算术平方根，故此选项不符合题意；

B、3 是 $(-3)^2$ 的算术平方根，故此选项不符合题意；

C、9 的平方根是 ± 3 ，故此选项不符合题意；

D、-3 是 9 的一个平方根，正确，故此选项符合题意；

5、D

【解析】解：在 $Rt\triangle ABC$ 中，

$$\because \angle B = 30^\circ, AC = 1, \therefore AB = 2,$$

$$\text{又} \because \text{动点 } P \text{ 在 } BC \text{ 边上}, \therefore AC < AP < AB, \therefore 1 < AP < 2,$$

$$\text{又} \because \frac{7}{3} > 2, \therefore AP \text{ 的长不可能是 } \frac{7}{3}.$$

故选：D

6、A

$$\text{【解析】解：} \because \text{数轴上 } A, B \text{ 两点表示的数分别是 } -1 \text{ 和 } \sqrt{3},$$

$$\therefore AB = \sqrt{3} - (-1) = \sqrt{3} + 1,$$

$$\because \text{点 } B \text{ 关于点 } A \text{ 的对称点为 } C,$$

$$\therefore AC = AB = \sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 表示的数是 } -1 - (\sqrt{3} + 1) = -2 - \sqrt{3},$$

故选：A.

二、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

7、 ± 3

$$\text{【解析】解：} \because 2x^2 - 18 = 0,$$

$$\therefore 2x^2 = 18, \therefore x^2 = 9, \therefore x = \pm 3,$$

故答案为： ± 3 .

8、-1

$$\text{【解析】解：} \because |a-b+1| \text{ 与 } \sqrt{a+2b+4} \text{ 互为相反数},$$

$$\therefore |a-b+1| + \sqrt{a+2b+4} = 0,$$

$$\therefore a-b+1=0, a+2b+4=0$$

$$\text{解得 } a=-2, b=-1$$

$$\therefore (a-b)^{2015} = (-2+1)^{2015} = -1$$

故答案为：-1.

9、7

$$\text{【解析】解：} \because 9 < 13 < 16,$$

$$\therefore \sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16},$$

$$\text{即 } 3 < \sqrt{13} < 4,$$

$$\therefore a=3, b=4,$$

$$\therefore a+b=3+4=7,$$

故答案为：7.

10、 $\sqrt{10}\text{dm}$

【解析】解：由题意得：大正方形的面积为： $5+5=10(\text{dm}^2)$ ，
则大正方形的边长为： $\sqrt{10}\text{dm}$.

故答案为： $\sqrt{10}\text{dm}$.

11、 $0 < y \leq 3$

【解析】解： $\because x^3y^3 = -216, \therefore (xy)^3 = (-6)^3, \therefore xy = -6,$
 $\because x \leq -2, \therefore y > 0, \therefore x = -\frac{6}{y} \geq -2, \therefore 0 < y \leq 3,$
故答案为： $0 < y \leq 3$.

12、 $<$

【解析】解： $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, (\sqrt{3})^2 = 3,$
 $\therefore \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 - (\sqrt{3})^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 3 = \frac{\sqrt{5}-3}{2},$
 $\because (\sqrt{5})^2 = 5 < 3^2 = 9, \therefore \sqrt{5} < 3,$
 $\therefore \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 - (\sqrt{3})^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 3 = \frac{\sqrt{5}-3}{2} < 0, \therefore \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 < (\sqrt{3})^2,$
又： $\because \frac{\sqrt{5}+1}{2} > 0, \sqrt{3} > 0, \therefore \frac{\sqrt{5}+1}{2} < \sqrt{3},$
故答案为： $<$.

13、17, 14, $\sqrt{3}$

【解析】解： $x^2+1=290$ ，解得： $x=17$ ，
 $x^2+1=17$ ，解得： $x=4$ ， $x^2+1=4$ ，解得： $x=\sqrt{3}$ ，
 $\because \sqrt{3}-1 < 1$ ，故循环结束，
故答案为：17, 14, $\sqrt{3}$.

14、 $<$

【解析】解：由题意可知： $\angle AOB=90^\circ, AB=A'B$ ，
在 $Rt\triangle AOB$ 中，由勾股定理得 $AB^2=OA^2+OB^2$ ，

$$\therefore AB^2=2^2+7^2=53,$$

在 $Rt\triangle A'OB'$ 中, 由勾股定理得: $OB'^2=A'B'^2-OA'^2=53-9=44,$

$$\therefore OB'=2\sqrt{11} \text{ 米}, \therefore BB'=OB-OB'=(7-2\sqrt{11}) \text{ 米},$$

$$\because 3 < \sqrt{11} < 4, \therefore 6 < 2\sqrt{11} < 8, \therefore 7-2\sqrt{11} < 1,$$

故答案为: $<$.

15、 a

【解析】解: 由数轴上点的位置得: $b < a < 0 < c,$

$$\therefore a < 0, a-b > 0, a-c < 0,$$

$$\text{则 } \sqrt{a^2} + |a-b| - \sqrt{(a-c)^2} + \sqrt[3]{(b+c)^3}$$

$$= |a| + |a-b| - |a-c| + b+c$$

$$= -a + a - b - c + a + b + c$$

$$= a.$$

故答案为: a .

16、4

【解析】解: 设乙的边长为 $2a,$

$\because$ 正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$ 分别由两张相同的长方形纸片无缝拼接而成,

$$\therefore \frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{丙}}} = \frac{3}{5}, S_{\text{甲}} + S_{\text{乙}} = S_{\text{丙}},$$

$$\therefore \frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = \frac{3}{2}, \frac{S_{\text{乙}}}{S_{\text{丙}}} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore HM = 3a, EN = 5a,$$

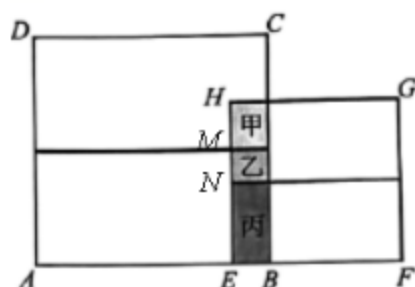
$\therefore$ 正方形 $EFGH$ 的边长为 $2 \times 5a = 10a$, 正方形 $ABCD$ 的边长为 $2(2a + 5a) = 14a$,

$$\therefore S_{\text{阴影区域}} = 14a \cdot 14a + 10a \cdot 10a - 2a \cdot 10a = 276,$$

解得 $a = 1$ (负值舍去),

$$\therefore S_{\text{乙}} = 2a \cdot 2a = 4\text{cm}^2,$$

故答案为: 4.



三、解答题（共 62 分）

17、(1) $x=-1$ 或 $x=3$ ；(2) $x=-3$

【解析】(1)解：解： $x-1=\pm 2$

解得 $x=-1$ 或 $x=3$ 。

(2)解：方程两边同时乘以 2，得 $(x-1)^3=-64$ ，

根据立方根的定义，得 $x-1=4$ ，

移项，得 $x=3$ 。

18、(1) $-38\frac{3}{4}$ ；(2) $\sqrt{5}-1$

【解析】(1)解： $(-2)^3 \times \sqrt{(-4)^2} + \sqrt[3]{(-4)^3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \sqrt[3]{27}$

$$= -8 \times 4 + (-4) + \frac{1}{4} - 3$$

$$= -32 - 4 + \frac{1}{4} - 3$$

$$= -38\frac{3}{4}；$$

(2)解： $|1-\sqrt{2}| + |\sqrt{2}-\sqrt{3}| + |\sqrt{3}-2| + |2-\sqrt{5}|$

$$= \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + 2-\sqrt{3} + \sqrt{5}-2$$

$$= \sqrt{5}-1；$$

19、(1) $\sqrt{85}-9$ ；(2)2.25

【解析】(1)解： $\because \sqrt{81} < \sqrt{85} < \sqrt{100}$ ，即 $9 < \sqrt{85} < 10$ ，

$\therefore \sqrt{85}$ 的整数部分为 9。

$\therefore \sqrt{85}$ 的小数部分为 $\sqrt{85}-9$ 。

(2)解：我们知道面积是 5 的正方形的边长是 $\sqrt{5}$ ，易知 $\sqrt{5} > 2$ ，因此可设 $\sqrt{5}=2+x$ ，可画出如图示

意图：由图中面积计算， $S_{\text{正方形}} = x^2 + 2 \times 2x + 4$ ，另一方面由题意知 $S_{\text{正方形}} = 5$ ，所以 $x^2 + 4x + 4 = 5$ 。

	2	x
x	2x	x^2
2	4	2x

略去 x^2 ，得方程 $4x - 1 = 0$ ，解得 $x = 0.25$ ，即 $\sqrt{5} \approx 2.25$ 。

20、(1) $\sqrt{3}$ ，2；(2) $k = \pm 2$

【解析】(1) 解： $x^2 + 2\sqrt{3}x + 5 = x^2 + 2 \times \sqrt{3}x + (\sqrt{3})^2 + 2 = (x + \sqrt{3})^2 + 2$ ，

$\therefore a = \sqrt{3}, b = 2$ ，

故答案为： $\sqrt{3}$ ，2；

(2) 解： $x^2 - 2kx + 7 = x^2 - 2kx + k^2 - k^2 + 7 = (x - k)^2 - k^2 + 7$ ，

$\therefore (x - k)^2 \geq 0$ ，

$\therefore (x - k)^2 - k^2 + 7$ 的最小值是 $-k^2 + 7$ ，

$\therefore$ 代数式 $x^2 - 2kx + 7$ 有最小值 3，

$\therefore -k^2 + 7 = 3$ ，即 $k^2 = 4$ ， $\therefore k = \pm 2$ 。

21、(1)4， $\sqrt{17} - 4$ ；(2)13；(3)6.9

【解析】(1) $\because \sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$ ， $\therefore 4 < \sqrt{17} < 5$ ，

$\therefore \sqrt{17}$ 的整数部分是 4，小数部分是 $\sqrt{17} - 4$ ，

故答案为：4， $\sqrt{17} - 4$ ；

(2) $\because \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$ ， $\therefore 1 < \sqrt{3} < 2$ ， $\therefore 6 < 5 + \sqrt{3} < 7$ ，

$\therefore a < 5 + \sqrt{3} < b$ ， $\therefore a = 6$ ， $b = 7$ ， $\therefore a + b = 13$ ；

(3) $\because 1 < \sqrt{3} < 2$ ， $\therefore 4 < 3 + \sqrt{3} < 5$ ，

$\therefore 3 + \sqrt{3}$ 的整数部分为 4，即 $x = 4$ ，

$3 + \sqrt{3}$ 的小数部分为 $3 + \sqrt{3} - 4 = \sqrt{3} - 1$ ，即 $y = \sqrt{3} - 1$ ，

$$\therefore x+y=4+4(\sqrt{3}-1)=4\sqrt{3}$$

$$\because 4\sqrt{3} \approx 6.9, \therefore x+4y \text{ 的近似值为 } 6.9.$$

$$22、(1)\pm 17.6; (2)1.72, -175, \pm 17.7; (3)\pm 7$$

$$\text{【解析】}(1) \because (\pm 17.6)^2 = 309.76, \therefore 309.76 \text{ 的平方根为 } \sqrt{309.76} = \pm 17.6,$$

$$\text{故答案为: } \pm 17.6;$$

$$(2) \because 17.2^2 = 295.84, \therefore 1.72^2 = 2.9584, \therefore 2.9584 \text{ 的算术平方根为 } 1.72, \therefore \sqrt{2.9584} = 1.72$$

$$\because 30625 = 306.25 \times 100, \therefore -\sqrt{30625} = -17.5 \times 10 = -175,$$

$$\because 3.2329 = 323.29 \div 100, 17.7^2 = 313.29,$$

$$\therefore \pm \sqrt{3.1329} = \pm 1.77,$$

$$\text{故答案为: } 1.72, -175, \pm 17.7;$$

$$(3) \because \sqrt{299.29} < \sqrt{300} < \sqrt{302.76},$$

$$\therefore 17.3 < 300 < 17.4, \therefore a = 17, \therefore 3a - 2 = 49,$$

$$\therefore 3a - 2 \text{ 的平方根为 } \pm \sqrt{49} = \pm 7.$$

$$23. (10 \text{ 分}) \text{ 已知一列数: } a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \text{ 满足对一切正整数 } n \text{ 都有}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} = \frac{1}{2\sqrt{a_1 a_2}}, \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} = \frac{1}{2\sqrt{a_2 a_3}}, \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} = \frac{1}{2\sqrt{a_3 a_4}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_4}} = \frac{1}{2\sqrt{a_4 a_5}}, \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n}} = \frac{1}{2\sqrt{a_n a_{n+1}}} \text{ 成立, 且 } a_1 = 1.$$

$$(1) \text{ 求 } a_2, a_3 \text{ 的值;}$$

$$(2) \text{ 猜想第 } n \text{ 个数 } a_n \text{ (用 } n \text{ 表示);}$$

$$(3) \text{ 求 } \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \sqrt{a_3 a_4} + \dots + \sqrt{a_{2021} a_{2022}} \text{ 的值.}$$

$$\text{【答案】}(1) a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{9}; (2) a_n = \frac{1}{n^2}; (3) \frac{2021}{2022}$$

$$\text{【解析】}(1) \text{ 解: } \because a_1 = 1, \frac{1}{\sqrt{a_1}} = \frac{1}{2\sqrt{a_1 a_2}}, \therefore \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{2\sqrt{a_2}}, \therefore a_2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} = \frac{1}{2\sqrt{a_2 a_3}}, \therefore \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4} a_3}},$$

$$\therefore 1+2=\frac{1}{\sqrt{a_3}}, \therefore a_3=\frac{1}{9};$$

$$(2)\text{解: } \therefore \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} = \frac{1}{2\sqrt{a_3a_4}}, \therefore \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{9}a_4}},$$

$$\therefore 1+2+3=\frac{1}{\frac{2}{3}\sqrt{a_4}}, \therefore a_4=\frac{1}{16},$$

$$\therefore a_1=\left(\frac{1}{1}\right)^2, a_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2, a_3=\left(\frac{1}{3}\right)^2, a_4=\left(\frac{1}{4}\right)^2, \therefore a_n=\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^2};$$

$$(3)\text{解: } \therefore a_n=\frac{1}{n^2}, \therefore a_n \cdot a_{n+1}=\frac{1}{n^2(n+1)^2}, \therefore \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}=\sqrt{\frac{1}{n^2(n+1)^2}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

$$\therefore \sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \sqrt{a_3a_4} + \cdots + \sqrt{a_{2021}a_{2022}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} = 1 - \frac{1}{2022} = \frac{2021}{2022}.$$