# 江苏省南菁高级中学高三数学周周练二（理科）

**命题人：董骁　　　审题人：李国祥**

**2018-9-22**

**一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分.**

1. 对于命题 $p$：$\exists x\in R$，使得 $x^2+x+1<0$．则 $\neg p$ 为：____▲____．$\forall x\in R$，均有 $x^2+x+1\geq 0$

2. 函数 $f(x)=\sqrt{1-2\log_6 x}$ 的定义域为__▲__.（0，$\sqrt{6}$ ]

3. 函数 $f(x)=x^3+ax$ 在 $(1,2)$ 处的切线方程为____▲____．$y=4x-2$

4. 已知集合 A={x∈R||x+3|+|x－4|≤9}，B=$\left\{x\in R\middle|x=4t+\frac{1}{t}-6,t\in(0,+\infty)\right\}$，则集合 A∩B=__▲__．{x|－2≤x≤5}

5. 函数 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{2}{x}$ 的零点所在的区间是（$n$,$n$＋1），则正整数 $n$=____▲___．1

6. 已知集合 $A=\{x\,|\,x>5\}$，集合 $B=\{x\,|\,x>a\}$，若命题“$x\in A$”是命题“$x\in B$”的充分不必要条件，则实数 $a$ 的取值范围是____▲____．$a<5$

7. 对一切实数 $x$，不等式 $x^2+a\,|\,x\,|+1\geq 0$ 恒成立，则实数 $a$ 的取值范围是_____▲_____．$[-2,+\infty)$

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x(x\leq 0)\\ \log_2 x(x>0)\end{cases}$，方程 $f\left[f(x)\right]-1=0$ 的解为___▲___．1,4

9. 已知 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x$.若在区间 $[-1,3]$ 内，方程 $f(x)=kx+k+1(k\in R\text{且}k\neq 1)$ 有 4 个实数根，则 $k$ 的取值范围是___▲___. $\left(-\frac{1}{3},0\right)$

10. 若函数 $f(x)$ 为定义在 $R$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x\ln x$，则不等式 $f(x)<-e$ 的解集为____▲____. $(-\infty,-e)$

11. 若存在实数 $p\in[-1,1]$，使得不等式 $px^2+(p-3)x-3>0$ 成立，则实数 $x$ 的取值范围为▲_____．$x<-1\text{或}x>3$

12. 已知函数$f(x)=\begin{cases}3|x+1|-5,(x\leqslant 0)\\ \ln x,(x>0)\end{cases}$，若函数$y=f(x)-kx+2$恰有 3 个零点，则实数 k 的取值范围为__▲__. $\{k|-3<k\leqslant 0$或$k=e\}$

13. 定义在 R 上的函数 f(x)满足$f(x)+f'(x)>1$, $f(0)=4$,则不等式$e^x f(x)>e^x+3$（其中 e 为自然对数的底数）的解集为__▲__. $(0,+\infty)$

14. 若不等式$|ax^3-\ln x|\geqslant 1$对任意$x\in(0,1]$都成立，则实数$a$取值范围是__▲__. $a\geq\frac{e^2}{3}$

**二、解答题：本大题共 6 小题，共 90 分. 请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.**

15. （本小题满分 14 分）

设 $p$：实数 $x$ 满足 $x^2-4ax+3a^2<0$（其中 $a\neq 0$），$q$：实数 $x$ 满足$\begin{cases}x^2-x-6\leqslant 0,\\ x^2+2x-8>0.\end{cases}$

(1)若 $a=1$，且 $p\wedge q$ 为真，求实数 $x$ 的取值范围；

(2)若 $p$ 是 $q$ 的必要不充分条件，求实数 $a$ 的取值范围.

解：(1)当 $a=1$ 时，解得 $1<x<3$，即 $p$ 为真时实数 $x$ 的取值范围是 $1<x<3$. …2 分

由$\begin{cases}x^2-x-6\leq 0,\\ x^2+2x-8>0,\end{cases}$得 $2<x\leq 3$，即 $q$ 为真时实数 $x$ 的取值范围是 $2<x\leq 3$. ……………4 分

若 $p\wedge q$ 为真，则 $p$ 真且 $q$ 真，………………5 分

所以实数 $x$ 的取值范围是$(2,3)$. ………………7 分

(2)$p$ 是 $q$ 的必要不充分条件，即 $q\Rightarrow p$，且 $p\not\Rightarrow q$，………………8 分

设 $A=\{x|p(x)\}$，$B=\{x|q(x)\}$，则 $A\supseteq B$，又 $B=(2,3]$，

由 $x^2-4ax+3a^2<0$ 得$(x-3a)(x-a)<0$，………………9 分

当 $a>0$ 时，$A=(a,3a)$，有$\begin{cases}a\leq 2,\\ 3<3a,\end{cases}$解得 $1<a\leq 2$；………………11 分

当 $a<0$ 时，$A=(3a,a)$，显然 $A\cap B=\varnothing$，不合题意. ………………13 分

所以实数 $a$ 的取值范围是$(1,2]$. ………………14 分

16. （本小题满分 14 分）

设关于 $x$ 的方程$(m+1)x^2-mx+m-1=0$有实根时，实数 $m$ 的取值范围是集合 $A$，函数 $f(x)=\lg[x^2-3x+2]$ 的定义域是集合 $B$.

(1)求集合 $A$；

(2)求 $A\cup B$ 及 $A\cap C_R B$ .

解：(1)当 $m+1=0$ 即 $m=-1$ 时，方程为 $x-2=0$，此时 $x=2$…………………………(2 分)

当 $m+1\neq0$ 即 $m\neq-1$ 时，方程有实根 $\Rightarrow\triangle=m^2-4(m+1)(m-1)\geqslant0$

$\Rightarrow m^2-4m^2+4\geqslant0\Rightarrow3m^2\leqslant4\quad\Rightarrow-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant m\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 且 $m\neq-1$…(6 分)

由上可知：$A=[-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}]$ ………………………………………………………(8 分)

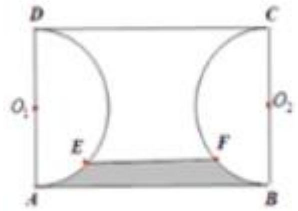
(2)∵ $B=\{x|x^2-3x+2>0\}=\{x|(x-2)(x-1)>0\}=(-\infty，1)\cup(2，+\infty)$ ……………(10 分)

∴ $A\cup B=(-\infty,\frac{2\sqrt{3}}{3}]$ ……………………………………………………………(12 分)

∴ $A\cap C_R B=[1,\frac{2\sqrt{3}}{3}]$ ………………………………………………………………(14 分)

17. （本小题满分 14 分）

如图，某大型水上乐园内有一块矩形场地 ABCD，$AB=120$米，$AD=80$米，以 AD，BC 为直径的半圆$O_1$和半圆$O_2$(半圆在矩形 ABCD 内部)为两个半圆形水上主题乐园，BC，CD，DA 都建有围墙，游客只能从线段 AB 处进出该主题乐园.为了进一步提高经济效益，水上乐园管理部门决定沿着$\overset{\frown}{AE}$，$\overset{\frown}{FB}$修建不锈钢护栏，沿着线段 EF 修建该主题乐园大门并设置检票口，其中 E，F 分别为$\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{BC}$上的动点，$EF//AE$，且线段 EF 与线段 AB 在圆心$O_1$和$O_2$连线的同侧.已知弧线部分的修建费用为 200 元/米，直线部分的平均修建费用为 400 元/米.




(1)若$EF=80$米，则检票等候区域(其中阴影部分)面积为多少平方米？

(2)试确定点 E 的位置，使得修建费用最低.

解：(1)如图，$ME=20$米，$O_1M=20\sqrt{3}$米，

梯形$O_1O_2FE$的面积为$\frac{1}{2}(120+80)\times20\sqrt{3}=2000\sqrt{3}$平方米.

矩形$AO_1O_2B$的面积为 4800 平方米.$\angle AO_1E=\frac{\pi}{6}$，

扇形$O_1AE$和扇形$O_2FB$的面积均为$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}\times1600=\frac{400\pi}{3}$平方米，

所以阴影部分面积为$4800-2000\sqrt{3}-\frac{800\pi}{3}$平方米.

答：检票等候区域(图中阴影部分)面积为$4800-2000\sqrt{3}-\frac{800\pi}{3}$平方米. ……6 分

(2)设$\angle AO_1E=\theta,\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{FE}$，$EF=120-2\times40\sin\theta=120-80\sin\theta$，

修建费用$f(\theta)=200\times80\theta+400\times(120-80\sin\theta)=16000(\theta+3-2\sin\theta)$，

$f'(\theta)=16000(1-2\cos\theta)$，令$f'(\theta)=0$，则$\theta=\frac{\pi}{3}$，

| $\theta$ | $(0,\frac{\pi}{3})$ | $\frac{\pi}{3}$ | $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ |
|---|---|---|---|
| $f'(\theta)$ | − | 0 | + |
| $f(\theta)$ | 减函数 | 极小值 | 增函数 |

所以，当$\theta=\frac{\pi}{3}$时，即$\angle AO_1E=\frac{\pi}{3}$，修建费用最低.

答：当$\angle AO_1E$为$\frac{\pi}{3}$时，修建费用最低．……14 分

18. （本小题满分 16 分）

已知函数$f(x)$定义在$(-1,1)$上，对于任意的$x,y\in(-1,1)$，有$f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1+xy})$，且当$x<0$时，$f(x)>0$.

(1)验证函数$f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$是否满足这些条件；

(2)证明函数$f(x)$是奇函数；

(3)若$f(\frac{a+b}{1+ab})=1,f(\frac{a-b}{1-ab})=2$，且$|a|<1,|b|<1$，求$f(a),f(b)$的值.

解：(1)由$\frac{1-x}{1+x}>0$可得$-1<x<1$，即其定义域为$(-1,1)$

又$f(x)+f(y)=\ln\frac{1-x}{1+x}+\ln\frac{1-y}{1+y}=\ln(\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y})=\ln\frac{1-x-y+xy}{1+x+y+xy}=\ln\frac{1-\frac{x+y}{1+xy}}{1+\frac{x+y}{1+xy}}=f(\frac{x+y}{1+xy})$

又当$x<0$时，$1-x>1+x>0$，$\therefore\frac{1-x}{1+x}>1$，$\therefore\ln\frac{1-x}{1+x}>0$，故$f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$满足这些条件.……5 分

（3） ……16分 ……10分

（2）令x=y=0，∴f（0）=0，

令y=-x，有f（-x）+f（x）=f（0）=0，∴f（x）为奇函数

由条件得$\begin{cases}f(a)+f(b)=1\\f(a)-f(b)=2\end{cases}$，解得$f(a)=\frac{3}{2}$，$f(b)=-\frac{1}{2}$.

19. （本小题满分 16 分）

已知函数已知函数$f\left(x\right)=\log_2\left(1+2^{x+1}+4^x a\right)+bx\left(a,b\in R\right)$.

(1)若$a=1$，$f\left(x\right)$是偶函数，求$b$的值；

(2)若$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,-1\right)$上有意义，求实数$a$的取值范围；

(3)若$a=4$，且$A=\left\{x\middle|f\left(x\right)=\left(b+1\right)\left(x+1\right)\right\}=\varnothing$，求实数$b$的取值范围.

（1）当$a=1$时，$f\left(x\right)=\log_2\left(1+2^{x+1}+4^x\right)+bx=2\log_2\left(1+2^x\right)+bx$，

若$f\left(x\right)$是偶函数，则$f\left(x\right)-f\left(-x\right)=0$，即$2\log_2\dfrac{1+2^x}{1+2^{-x}}+2bx=0$，

即$2x+2bx=0$，所以$b=-1$．　…………………………4 分

（2）$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,-1\right)$上有意义，则对任意$x\in\left(-\infty,-1\right)$，$1+2^{x+1}+4^x a>0$恒成立，

即对任意$x\in\left(-\infty,-1\right)$，$a>-\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$恒成立，　………………………6 分

设$g\left(x\right)=-\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$，由指数函数单调性得$g\left(x\right)$在$\left(-\infty,-1\right)$上是增函数，

所以$g\left(x\right)<g\left(-1\right)=-8$，　…………………………8 分

由$a>g\left(x\right)$对任意$x\in\left(-\infty,-1\right)$时恒成立得$a\geq-8$，即实数$a$的取值范围是$\left[-8,+\infty\right)$. ………………10 分

（3）当$a=4$时，$f\left(x\right)=\left(b+1\right)\left(x+1\right)\Leftrightarrow\log_2\left(1+2^{x+1}+4^{x+1}\right)-x=b+1$

$\Leftrightarrow\log_2\left(\dfrac{1}{2^x}+2^{x+2}+2\right)=b+1$，

由$A=\varnothing$可得方程$\log_2\left(\dfrac{1}{2^x}+2^{x+2}+2\right)=b+1$无实根，　…………………………12 分

因为$\dfrac{1}{2^x}+2^{x+2}+2\geq2\sqrt{\dfrac{1}{2^x}\times2^{x+2}}+2=6$，$\log_2\left(\dfrac{1}{2^x}+2^{x+2}+2\right)\geq\log_2 6$

所以，当$b+1<\log_2 6$，即$b<\log_2 3$时$A=\varnothing$，　…………………………14 分

- 故实数$b$的取值范围是$(-\infty,\log_2 3)$.　　…………………………16 分

20. （本小题满分 16 分）

设函数$f(x)=\ln x$，$g(x)=ax+\dfrac{a-1}{x}-3$（$a\in R$）.

(1)当$a=2$时，解关于$x$的方程$g(e^x)=0$（其中$e$为自然对数的底数）;

(2)求函数$\varphi(x)=f(x)+g(x)$的单调增区间;

(3)当$a=1$时，记$h(x)=f(x)\cdot g(x)$，是否存在整数$\lambda$，使得关于$x$的不等式$2\lambda\ge h(x)$有解？若存在，请求出$\lambda$的最小值；若不存在，请说明理由.（参考数据：$\ln 2\approx 0.6931$，$\ln 3\approx 1.0986$）

解：（1）当$a=2$时，方程$g(e^x)=0$即为$2e^x+\dfrac{1}{e^x}-3=0$，去分母，得

$2(e^x)^2-3e^x+1=0$，解得$e^x=1$或$e^x=\dfrac{1}{2}$，　　…………2 分

故所求方程的根为$x=0$或$x=-\ln 2$.　　………4 分

（2）因为$\varphi(x)=f(x)+g(x)=\ln x+ax+\dfrac{a-1}{x}-3(x>0)$，

所以$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}+a-\dfrac{a-1}{x^2}=\dfrac{ax^2+x-(a-1)}{x^2}=\dfrac{(ax-(a-1))(x+1)}{x^2}$（$x>0$），　　……6 分

①当$a=0$时，由$\varphi'(x)>0$，解得$x>0$;

②当$a>1$时，由$\varphi'(x)>0$，解得$x>\dfrac{a-1}{a}$;

③当$0<a<1$时，由$\varphi'(x)>0$，解得$x>0$;

④当$a=1$时，由$\varphi'(x)>0$，解得$x>0$;

⑤当$a<0$时，由$\varphi'(x)>0$，解得$0<x<\dfrac{a-1}{a}$.

综上所述，当$a<0$时，$\varphi(x)$的增区间为$(0,\dfrac{a-1}{a})$;

当$0\le a\le 1$时，$\varphi(x)$的增区间为$(0,+\infty)$;

$a>1$时，$\varphi(x)$的增区间为$(\dfrac{a-1}{a},+\infty)$.　　………10 分

（3）方法一：当$a=1$时，$g(x)=x-3$，$h(x)=(x-3)\ln x$，

所以$h'(x)=\ln x+1-\frac{3}{x}$单调递增，$h'(\frac{3}{2})=\ln\frac{3}{2}+1-2<0$，$h'(2)=\ln 2+1-\frac{3}{2}>0$，

所以存在唯一$x_0\in(\frac{3}{2},2)$，使得$h'(x_0)=0$，即$\ln x_0+1-\frac{3}{x_0}=0$，　　　　……………12分

当$x\in(0,x_0)$时，$h'(x)<0$，当$x\in(x_0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，

所以$h_{\min}(x)=h(x_0)=(x_0-3)\ln x_0=(x_0-3)(\frac{3}{x_0}-1)=-\frac{(x_0-3)^2}{x_0}=6-(x_0+\frac{9}{x_0})$，

记函数$r(x)=6-(x+\frac{9}{x})$，则$r(x)$在$(\frac{3}{2},2)$上单调递增，　　　　……14分

所以$r(\frac{3}{2})<h(x_0)<r(2)$，即$h(x_0)\in(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$，

由$2\lambda\geq-\frac{3}{2}$，且$\lambda$为整数，得$\lambda\geq 0$，

所以存在整数$\lambda$满足题意，且$\lambda$的最小值为0.　　　　………16分

方法二：当$a=1$时，$g(x)=x-3$，所以$h(x)=(x-3)\ln x$，

由$h(1)=0$得，当$\lambda=0$时，不等式$2\lambda\geq h(x)$有解，　　　　……………12分

下证：当$\lambda\leq-1$时，$h(x)>2\lambda$恒成立，即证$(x-3)\ln x>-2$恒成立.

显然当$x\in(0,1]\cup[3,+\infty)$时，不等式恒成立，

只需证明当$x\in(1,3)$时，$(x-3)\ln x>-2$恒成立.

即证明$\ln x+\frac{2}{x-3}<0$. 令$m(x)=\ln x+\frac{2}{x-3}$，

所以$m'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x-3)^2}=\frac{x^2-8x+9}{x(x-3)^2}$，由$m'(x)=0$，得$x=4-\sqrt{7}$，　　　　………14分

当$x\in(1,4-\sqrt{7})$，$m'(x)>0$；当$x\in(4-\sqrt{7},3)$，$m'(x)<0$；

所以$m_{\max}(x)=m(4-\sqrt{7})=\ln(4-\sqrt{7})-\frac{\sqrt{7}+1}{3}<\ln(4-2)-\frac{2+1}{3}=\ln 2-1<0$.

所以当$\lambda\leq-1$时，$h(x)>2\lambda$恒成立.

综上所述，存在整数$\lambda$满足题意，且$\lambda$的最小值为0.　　　　.……………16分