

无锡市第一中学 2023-2024 学年度第一学期阶段性质量检测试卷

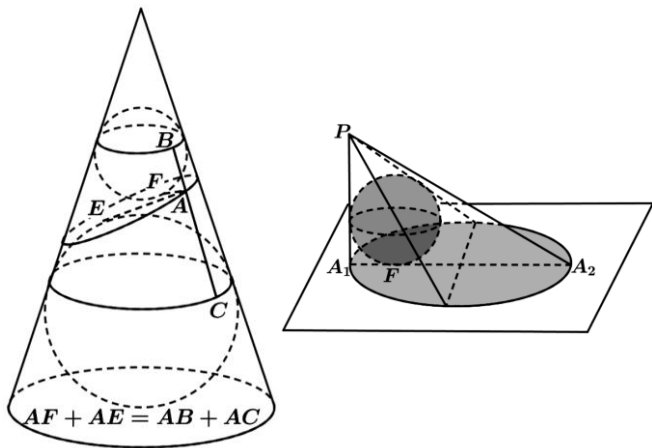
高二数学 2023.10

命题：高二数学备课组 审核：高二数学备课组

一. 单选题（每题 5 分，共 40 分）

1. 直线 $y = \frac{\pi}{2}$ 的倾斜角为 ()
- A. 180° B. 0° C. 90° D. 不存
2. 已知直线 $l_1: ax + y + a = 0$ 与 $l_2: (a-6)x + (a-4)y - 4 = 0$, 则 “ $a=2$ ” 是 “ $l_1 \parallel l_2$ ” 的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知 $x + y + 1 = 0$, 则 $\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ 的最小值为 ()
- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{5}$
4. 已知点 $M(x_0, y_0)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 外, 则直线 $x_0x + y_0y = 2$ 与圆的位置关系是 ()
- A. 相切 B. 相交 C. 相离 D. 不确定
5. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的两个焦点, P 是椭圆上一点, 则 $|PF_1| \cdot |PF_2|$ 的最大值是 ()
- A. $\frac{25}{4}$ B. 9 C. 16 D. 25
6. 瑞士数学家欧拉 (Leonhard Euler) 1765 年在其所著的《三角形的几何学》一书中提出: 任意三角形的外心、重心、垂心在同一条直线上. 后人称这条直线为欧拉线. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(2, 0), B(0, 2)$, 其欧拉线方程为 $2x - y - 2 = 0$, 则顶点 C 的坐标是 ()
- A. $(\frac{18}{5}, \frac{16}{5})$ B. $(\frac{16}{5}, \frac{18}{5})$ C. $(\frac{36}{13}, \frac{50}{13})$ D. $(\frac{50}{13}, \frac{36}{13})$
7. 如图①, 用一个平面去截圆锥得到的截面曲线是椭圆. 许多人从纯几何的角度出发对这个问题进行过研究, 其中比利时数学家 Germinaldandelin (1794–1847) 的方法非常巧妙, 极具创造性. 在圆锥内放两个大小不同的球, 使得它们分别与圆锥的侧面、截面相切, 两个球分别与截面相切于 E, F , 在截面曲线上任取一点 A , 过 A 作圆锥的母线, 分别与两个球相切于 C, B , 由球和圆的几何性质, 可以知道,
- $AE = AC$, $AF = AB$, 于是 $AE + AF = AB + AC = BC$. 由 B, C 的产生方法可知, 它们之间的距离

BC 是定值，由椭圆定义可知，截口曲线是以 E, F 为焦点的椭圆。



如图②，一个半径为 2 的球放在桌面上，桌面上方有一个点光源 P ，则球在桌面上的投影是椭圆，已知

A_1A_2 是椭圆的长轴， PA_1 垂直于桌面且与球相切， $PA_1 = 5$ ，则椭圆的焦距为（ ）

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

8. 在直角坐标系内，已知 $A(3,5)$ 是以点 C 为圆心的圆 C 上的一点，折叠该圆两次使点 A 分别与圆上不相同的两点（异于点 A ）重合，两次的折痕方程分别为 $x - y + 1 = 0$ 和 $x + y - 7 = 0$ ，若圆 C 上存在点

P ，使得 $\overrightarrow{MP} \cdot (\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CN}) = 0$ ，其中点 $M(-m, 0)$ 、 $N(m, 0)$ ，则 m 的最大值为（ ）

- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

二．多选题（每题 5 分，共 20 分）

9. 已知 P 是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上的动点， Q 是圆 $D: (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 上的动点，则（ ）

- A. 椭圆 C 的焦距为 $\sqrt{3}$ B. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
C. 圆 D 在椭圆 C 的内部 D. $|PQ|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

10. 已知实数 x, y 满足曲线 C 的方程 $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$ ，则下列选项正确的是（ ）

- A. $x^2 + y^2$ 最大值是 $\sqrt{3} + 1$
B. $\frac{y+1}{x+1}$ 的最大值是 $2 + \sqrt{6}$
C. 过点 $(0, \sqrt{2})$ 作曲线 C 的切线，则切线方程为 $x - \sqrt{2}y + 2 = 0$
D. $|x - y + 3|$ 的最小值是 $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

11. 已知圆 $M: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$, 圆 $N: x^2 + y^2 - 8x - 8y + 23 = 0$, 则下列选项正确的是 ()

A. 直线 MN 的方程为 $4x - 3y - 4 = 0$

B. 若 P, Q 两点分别是圆 M 和圆 N 上的动点, 则 $|PQ|$ 的最大值为 5

C. 圆 M 和圆 N 的一条公切线长为 $2\sqrt{5}$

D. 经过点 M, N 两点的所有圆中面积最小的圆的面积为 $\frac{25}{4}\pi$

12. 设 $k \in \mathbb{R}$, 过定点 A 的动直线 $l_1: x + ky = 0$, 和过定点 B 的动直线 $l_2: kx - y + 3 - k = 0$ 交于点 P ,

M 是圆 $C: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$ 上的任意一点, 则下列说法正确的有 ()

A. 直线 l_1 与圆 C 相切时 $k = \frac{4}{3}$

B. M 到 l_1 距离的最大值是 $2 + 2\sqrt{5}$

C. 直线 l_2 与圆 C 相交的最短弦长为 $2\sqrt{2}$

D. $|PA| + |PB|$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$

三. 填空题 (每题 5 分, 共 20 分)

13. 已知实数 x, y 满足 $y = -2x + 8$, 且 $2 \leq x \leq 3$, 若直线 l 的方向向量为 $\vec{a} = (2x, -3y)$, 则直线 l 的斜率的取值范围为_____.

14. 对平面上两点 A, B , 满足 $\frac{|PA|}{|PB|} = \lambda (\lambda \neq 1)$ 的点 P 的轨迹是一个圆, 这个圆最先由古希腊数学家阿波罗

尼斯发现, 命名为阿波罗尼斯圆. 已知 $A(1, 0), B(4, 0), D(0, 3)$, 若动点 P 满足 $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{1}{2}$, 则 $2|PD| - |PB|$ 的最小值是_____.

15. 已知 P 为直线 $x + y + 4\sqrt{2} - 6 = 0$ 上一动点, 过点 P 作圆 $C: x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$ 的切线, 切点分别为 A, B , 则当四边形 $PACB$ 面积最小时, 直线 AB 的方程为_____.

16. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点, 右顶点为 A , D 为 AF_2 的中点, 且

$F_1D \perp AF_2$, 直线 F_1D 与 C 交于 M, N 两点, 且 $\square AMN$ 的周长为 28, 则椭圆 C 的短轴长为_____.

四. 解答题 (共 70 分)

17. 设直线 $l: Ax + By + C = 0$ 及直线外一点 $P(x_0, y_0)$.

(1) 写出点 P 到直线 l 的距离公式;

(2) 推导点到直线的距离公式.

18. 已知 $\square ABC$ 的顶点 $B(-2, 0)$, AB 边上的高所在的直线方程为 $x + 3y - 26 = 0$.

(1) 求直线 AB 的方程;

(2) 在两个条件中任选一个, 补充在下面问题中并作答.

① 角 A 的平分线所在直线方程为 $x + y - 2 = 0$;

② BC 边上 中线所在的直线方程为 $y = 3$.

若 _____, 求直线 AC 的方程.

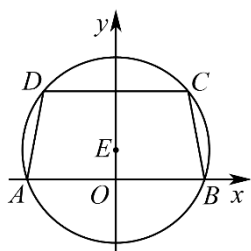
注: 如果选择多个条件分别解答, 则按第一个解答计分.

19. 若椭圆 C 的两个焦点坐标分别是 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 并且经过点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 过 F_2 作 x 轴的垂线与椭圆相交于 A, B 两点.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 求三角形 ABF_1 的面积.

20. 如图所示, 等腰梯形 $ABCD$ 底边 AB 在 x 轴上, 顶点 A 与顶点 B 关于原点 O 对称, 且底边 AB 和 CD 的长分别为 6 和 $2\sqrt{6}$, 高为 3.



(1) 求等腰梯形 $ABCD$ 的外接圆 E 的方程;

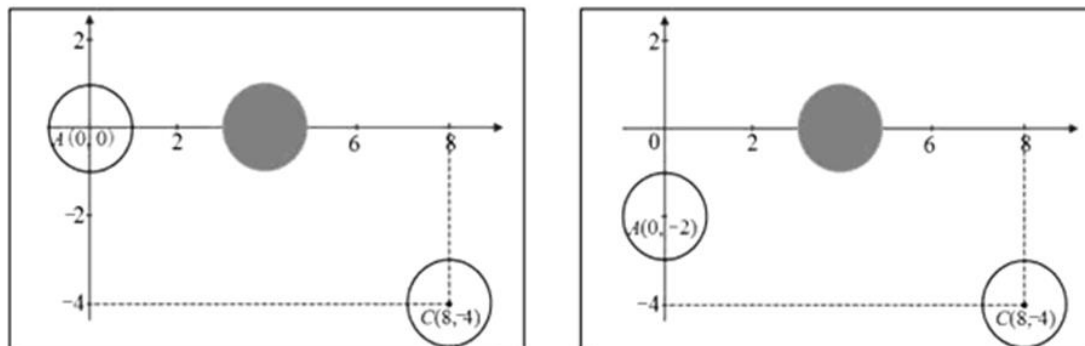
(2) 若点 N 的坐标为 $(2, 1)$, 求过点 N 且被圆 E 截得的弦长与 CD 等长的直线的一般式方程.

21. 在平面直角坐标系中, 曲线 E 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 4$.

(1) 若直线 $l: y = kx - 4$ 与曲线 E 交于不同的两点 C, D , 且 $\angle OCD = 30^\circ$ (O 为坐标原点), 求直线 l 的斜率;

(2) 若点 Q 是直线 $l: x - y - 4 = 0$ 上的动点, 过 Q 作曲线 E 的两条切线 QM, QN , 切点为 M, N , 探究: 直线 MN 是否过定点.

22. 规定：在桌面上，用母球击打目标球，使目标球运动，球的位置是指球心的位置，我们说球 A 是指该球的球心点 A. 两球碰撞后，目标球在两球的球心所确定的直线上运动，目标球的运动方向是指目标球被母球击打时，母球球心所指向目标球球心的方向. 所有的球都简化为平面上半径为 1 的圆，且母球与目标球有公共点时，目标球就开始运动，在桌面上建立平面直角坐标系，解决下列问题：



(1) 如图，设母球 A 的位置为 $(0, 0)$ ，目标球 B 的位置为 $(4, 0)$ ，要使目标球 B 向 $C(8, -4)$ 处运动，求母球 A 球心运动的直线方程；

(2) 如图，若母球 A 的位置为 $(0, -2)$ ，目标球 B 的位置为 $(4, 0)$ ，能否让母球 A 击打目标 B 球后，使目标 B 球向 $(8, -4)$ 处运动？

(3) 若 A 的位置为 $(0, a)$ 时，使得母球 A 击打目标球 B 时，目标球 B $(4\sqrt{2}, 0)$ 运动方向可以碰到目标球 C $(7\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$ ，求 a 的最小值（只需要写出结果即可）