

江苏省梅村高级中学 2020-2021 学年度第二学期期中试卷

高一数学

命题:

校对:

审核:

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

- 1、本试卷共 4 页，包含选择题（第 1 题~第 12 题，共 12 题）、非选择题（第 13 题~第 22 题，共 10 题）两部分。本卷满分 150 分，答题时间为 120 分钟。
- 2、试题答案需作答在答题卡，答在试卷上无效。
- 3、作答选择题时必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其它答案；作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其它位置作答一律无效。
- 4、如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的。）

1. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $\vec{AB} + \vec{AC} - \vec{DA} =$ ()

- A. $2\vec{AC}$ B. $\vec{0}$ C. $2\vec{AD}$ D. $2\vec{BD}$

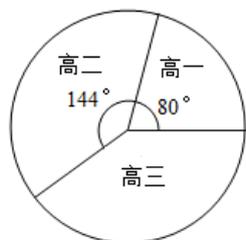
2. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $b = 2\sqrt{3}$ ， $B = 30^\circ$ ，则 $\frac{a+c}{\sin A + \sin C}$ 的值为 ()

- A. $4\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. 2

3. 已知向量 $\vec{a} = (x, 2)$ ， $\vec{b} = (3, -4)$ ，若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $x =$ ()

- A. $\frac{8}{3}$ B. $-\frac{8}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

4. 某市在“一带一路”国际合作高峰论坛前夕，在全市高中学生中进行“我和一带一路”的学习征文，收到的稿件经分类统计，得到如图所示的扇形统计图。又已知全市高一年级共交稿 2000 份，则高三年级的交稿数为 ()



- A. 2800 B. 3000 C. 3200 D. 3400

5. 18 世纪末期，挪威测量学家威塞尔首次利用坐标平面上的点来表示复数，使复数及共运算具有了几何意义，例如， $|z|=|OZ|$ ，也即复数 z 的模的几何意义为 z 对应的点 Z 到原点的距离. 在复平面内，复数 $z_0 = \frac{a+2i}{1+i}$ (i 是虚数单位， $a \in \mathbf{R}$) 是纯虚数，其对应的点为 Z_0 ， Z 为曲线 $|z|=1$ 上的动点，则 Z_0 与 Z 之间的最小距离为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

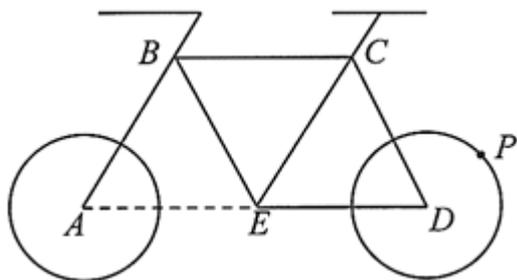
6. 高铁、扫码支付、共享单车、网购并称中国“新四大发明”，近日对全国 100 个城市的共享单车和扫码支付的使用人数进行大数据分析，其中共享单车使用的人数分别为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$ ，它们的平均数为 \bar{x} ，方差为 s^2 ；其中扫码支付使用的人数分别为 $2x_1+3, 2x_2+3, 2x_3+3, \dots, 2x_{100}+3$ ，它们的平均数为 \bar{x}' ，方差为 s'^2 ，则 \bar{x}' ， s'^2 分别为 ()

- A. $2\bar{x}+3, 2s^2+3$ B. $2\bar{x}, 2s^2$ C. $2\bar{x}+3, 4s^2+3$ D. $2\bar{x}+3, 4s^2$

7. 有一道解三角形的题，因为纸张破损，在划横线地方有一个已知条件看不清. 具体如下：在 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c ，已知角 $B=45^\circ, a=\sqrt{3}$ ，_____，求角 A . 若已知正确答案为 $A=60^\circ$ ，且必须使用所有已知条件才能解得，请你选出一个符合要求的已知条件是 ()

- A. $C=75^\circ$ B. $b=\sqrt{2}$
 C. $b\cos A = a\cos B$ D. $S_{\triangle ABC} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$

8. 骑自行车是一种能有效改善心肺功能的耐力性有氧运动，深受大众喜爱，如图是某一自行车的平面结构示意图，已知图中的圆 A (前轮)，圆 D (后轮) 的半径均为 $\sqrt{3}$ ， $\triangle ABE, \triangle BEC, \triangle ECD$ 均是边长为 4 的等边三角形. 设点 P 为后轮上的一点，则在骑动该自行车的过程中， $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BP}$ 的最大值为 ()



- A. 18 B. 24 C. 36 D. 48

二、多项选择题：(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分在每小题给出的四个选项中有多项符合题目要求全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.)

9. 已知复数 $z(1+2i) = 5i$ ，则下列结论正确的是 ()

- A. $|z| = \sqrt{5}$
 B. 复数 z 在复平面内对应的点在第二象限
 C. $\bar{z} = -2+i$
 D. $z^2 = 3+4i$

10. 下列结论正确的是 ()

A. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A > B$, 则 $\sin A > \sin B$

B. 在锐角三角形 ABC 中, 不等式 $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ 恒成立

C. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $C = \frac{\pi}{4}$, $a^2 - c^2 = bc$, 则 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形

D. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b = 3$, $A = 60^\circ$, 三角形面积 $S = 3\sqrt{3}$, 则三角形外接圆半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 某赛季甲乙两名篮球运动员各6场比赛得分情况如表:

场次	1	2	3	4	5	6
甲得分	31	16	24	34	18	9
乙得分	23	21	32	11	35	10

则下列说法正确的是 ()

A. 甲运动员得分的极差小于乙运动员得分的极差

B. 甲运动员得分的中位数小于乙运动员得分的中位数

C. 甲运动员得分的平均值大于乙运动员得分的平均值

D. 甲运动员的成绩比乙运动员的成绩稳定

12. 下列命题正确的是 ()

A. 已知 \vec{e}_1 和 \vec{e}_2 是两个互相垂直的单位向量, $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{b} = k\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 垂直, 则实数 $k = 6$

B. 非零向量 \vec{e}_1 和 \vec{e}_2 不共线, 若 $\vec{AB} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{BC} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{CD} = 3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2$, 则A、B、D三点共线

C. 若平行四边形 $ABCD$ 满足 $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0}$, $(\vec{AB} - \vec{AD}) \cdot \vec{AC} = 0$, 则该四边形一定是正方形

D. 点 O 在 $\triangle ABC$ 所在的平面内, 若 $\vec{OA} \cdot \left(\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} - \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}\right) = \vec{OB} \cdot \left(\frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} - \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|}\right) = 0$, 则点 O 为 $\triangle ABC$

的垂心

三、填空题: (本题共4小题, 每小题5分, 共20分.)

13. 设复数 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 其中 i 为虚数单位, 则 $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 =$ _____.

14. 平面向量 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 两两夹角都相等, 且 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$, 则 $|\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}| =$ _____.

15. 古希腊数学家海伦著作《测地术》中记载了著名的海伦公式, 利用三角形的三边长求三角形的面积. 若三角形的三边分别为 a 、 b 、 c , 则其面积 $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, 这里 $p = \frac{a+b+c}{2}$, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 8$, $AB = 3AC$. 当面积 S 最大时 $\cos A =$ _____.

16. $\triangle ABC$ 内接于以 O 为圆心, 1为半径的圆, 且 $3\vec{OA} + 4\vec{OB} + 5\vec{OC} = \vec{0}$, 则 $S_{\triangle ABC} =$ _____.

四、解答题：（本题共 6 小题，共 70 分解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。 ）

17. 在① $(t\vec{a} + \vec{b}) // (\vec{a} + t\vec{b})$ ；② $(t\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} + t\vec{b})$ ；③ $|t\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} + t\vec{b}|$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并解答问题。

已知向量 $\vec{a} = (-1, -1)$, $\vec{b} = (0, 1)$

(1) 若_____，求实数 t 的值；

(2) 若 $\vec{c} = (x, y)$ 向量，且 $\vec{c} = -y\vec{a} + (1-x)\vec{b}$ ，求 $|\vec{c}|$ 。

18. 已知复数 $z_1 = -2 + i$, $z_1 z_2 = -5 + 5i$ （其中 i 为虚数单位）

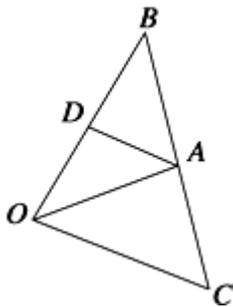
(1) 求复数 z_2 ；

(2) 若复数 $z_3 = (3 - z_2) [(m^2 - 2m - 3) + (m - 1)i]$ 所对应的点在第四象限，求实数 m 的取值范围。

19. 已知 O, A, B 是平面上不共线的三点，直线 AB 上有一点 C ，满足 $2\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{0}$ ，

(1) 用 \vec{OA}, \vec{OB} 表示 \vec{OC} ；

(2) 若点 D 是 OB 的中点，用向量方法证明四边形 $OCAD$ 是梯形。



20. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知向量 $\vec{m} = (\cos B, 2\cos^2 \frac{C}{2} - 1)$, $\vec{n} = (c, b - 2a)$, 且 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$.

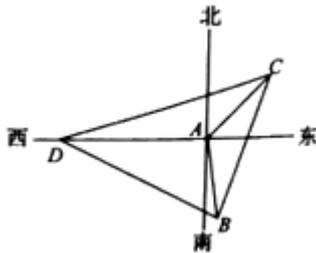
(I) 求 $\angle C$ 的大小;

(II) 若点 D 为边 AB 上一点, 且满足 $\vec{AD} = \vec{DB}$, $|\vec{CD}| = \sqrt{7}$, $c = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

21. 已知灯塔 B 与海洋观测站 A 的距离为 2km , 灯塔 C 在观测站 A 的北偏东 45° 方向, 灯塔 D 在观测站 A 的正西方向, 灯塔 B 在灯塔 D 的南偏东 60° 方向. 在观测站 A 与灯塔 B, C 构成的三角形 ABC 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 所对的边, 且满足 $a^2 = 3b^2 + 3c^2 - 2\sqrt{3}bc \sin A$.

(1) 求灯塔 B 与灯塔 C 的距离;

(2) 求 $\triangle BCD$ 的面积.



22. 中国独有的文书工具，即笔、墨、纸、砚，有文房四宝之名，起源于南北朝时期。其中宣纸是文房四宝的一种，宣纸“始于唐代，产于泾县”，因唐代泾县隶属宣州管辖，故因地得名宣纸。宣纸按质量等级分为：正牌（优等品）、副牌（合格品）、废品三等。某公司生产的宣纸为纯手工制作，年产宣纸 10000 刀（1 刀=100 张），该公司按照某种质量指标 x 给宣纸确定等级如表所示：

x 的范围	$(44, 48] \cup (52, 56]$	$(48, 52]$	$[0, 44] \cup (56, 60]$
质量等级	副牌	正牌	废品

在该公司所生产的宣纸中随机生产了一刀进行检验，得到频率分布直方图如图所示，已知每张正牌宣纸的利润为 15 元，副牌宣纸利润为 8 元，废品的利润为 -20 元。

(I) 试估计该公司的年利润；

(II) 市场上有一种售价为 100 万元的机器可以改进宣纸的生产工艺，但这种机器的使用寿命为一年，只能提高宣纸的质量，不能增加宣纸的年产量；据调查这种机器生产的宣纸的质量指标 x 如表所示：

x 的范围	$(\bar{x} - 2, \bar{x} + 2)$	$(\bar{x} - 6, \bar{x} + 6)$
频率	0.6827	0.9545

其中 \bar{x} 为质量指标 x 的平均值，但是由于人们对传统手工工艺的认可，改进后的正牌和副牌宣纸的利润都将下降 3 元/张，请该公司是否购买这种机器，请你为公司提出合理建议，并说明理由。（同一组的数据用该组区间的中点值作代表）

