

数学试卷

2020. 10

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

1. 下列关系中正确的个数是

$$\textcircled{1} \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \quad \textcircled{2} \sqrt{2} \notin \mathbb{R} \quad \textcircled{3} 0 \in \mathbb{N}^* \quad \textcircled{4} \pi \in \mathbb{Z}$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x = 0\}$, $B = \{x | x^2 + x = 0\}$, 则 $A \cup B =$

A. $\{-1, 2\}$ B. $\{1\}$ C. $\{-1, 0, 2\}$ D. $\{0\}$

3. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} A =$

A. $\{x | -1 < x < 2\}$ B. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$
C. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$ D. $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$

4. 已知命题 $p: \exists n \in \mathbb{N}, n^2 > 2n + 5$, 则 p 的否定为

A. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 2n + 5$ B. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2n + 5$
C. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2n + 5$ D. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 > 2n + 5$

5. 若一次函数的图象经过点 $A(1, 6)$ 和 $B(2, 8)$, 则该函数的图象还经过的点的坐标为

A. $(\frac{1}{2}, 5)$ B. $(\frac{1}{4}, 4)$ C. $(-1, 3)$ D. $(-2, 1)$

6. 已知函数 $f(2x+1) = 3x-5$, 若 $f(a) = 10$, 则实数 a 的值为

A. 5 B. 10 C. 11 D. 2

7. 下列各组函数中, 表示同一函数的是

A. $y = \sqrt{x^2}$, $s = (\sqrt{t})^2$ B. $y = |x|$, $u = \sqrt{v^2}$
C. $y = \frac{x^2-1}{x-1}$, $m = n+1$ D. $y = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$, $y = \sqrt{x^2-1}$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

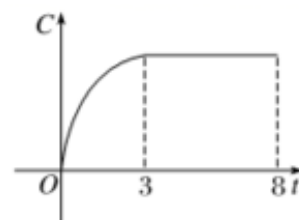
8. 已知 $x > 2$, 则 $\frac{x^2}{x-2}$ 的最小值是

- A. 2 B. 6 C. 4 D. 8

9. 下列选项中 p 是 q 的充分不必要条件的是

- A. $p: 1 < x < 2, q: 1 \leq x \leq 2$ B. $p: xy > 1, q: x > 1, y > 1$
C. $p: \frac{1}{x} > 1, q: x < 1$ D. $p: \text{两直线平行}, q: \text{内错角相等}$

10. 某工厂八年来产品累积产量 C (即前 t 年年产量之和) 与时间 t (年) 的函数如图, 下列四种说法中正确的是



- A. 前三年中, 产量增长的速度越来越快
B. 前三年中, 产量增长的速度越来越慢
C. 第三年后, 这种产品停止生产
D. 第三年后, 年产量保持不变

11. 下列说法中正确的是

- A. 若 $a > b > 0$, 则 $ac^2 > bc^2$ B. 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 > ab > b^2$
C. 若 $a > b > 0$ 且 $c < 0$, 则 $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$ D. 若 $a > b$ 且 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 则 $ab > 0$

12. 已知 x, y 为正数, 且 $xy=1, a=x+y, b=\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$, 下列选项中正确的有

- A. a 的最小值为 2 B. b 的最小值为 4
C. $a+b$ 的最小值为 5 D. ab 的最小值为 9

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上)

13. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x}}$ 的定义域为_____.

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x + \frac{6}{x} - 6, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(f(-2)) =$ _____.

15. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{y | y = x^2, x \in A\}$, $C = \{y | y = 2x + a, x \in A\}$, 若 $C \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围为_____.

16. 在 $\mathbb{R}$ 上定义运算: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 则 $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$ _____, 若不等式 $\begin{vmatrix} x-1 & a-2 \\ a+1 & x \end{vmatrix} \geq 1$ 对

任意实数 x 恒成立, 则实数 a 的取值范围为_____.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共计 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

若不等式 $ax^2 + 5x - 2 > 0$ 的解集是 $\left\{x \mid \frac{1}{2} < x < 2\right\}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求不等式 $\frac{1-ax}{x+1} > a+5$ 的解集.

18. (本小题满分 12 分)

设全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x \mid 1 \leq x < 4\}$, $B = \{x \mid 2a \leq x < 3-a\}$.

(1) 若 $a = -2$, 求 $B \cap A$, $B \cap (\complement_U A)$;

(2) 若 $A \cup B = A$, 求实数 a 的取值范围.

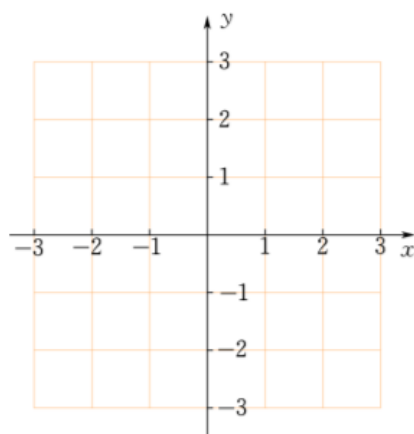
19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2 + \frac{x-2|x|}{3} \quad (-2 < x \leq 3)$.

(1) 用分段函数的形式表示函数 $f(x)$;

(2) 画出函数 $f(x)$ 的图象;

(3) 写出函数 $f(x)$ 的值域.



20. (本小题满分 12 分)

已知 x, y 均为正数, 且 $xy - (x+4y) - 5 = 0$.

(1) 求 xy 的最小值;

(2) 求 $x+y$ 的最小值.

21. (本小题满分 12 分)

某厂以 x 千克/时的速度匀速生产某种产品 (生产条件要求 $1 \leq x \leq 10$), 每小时可获得的利润是 $50(5x - \frac{3}{x} + 1)$ 元.

(1) 要使生产该产品 2 小时获得的利润不低 1500 元, 求 x 的取值范围;

(2) 要使生产 480 千克该产品获得的利润最大, 问: 该厂应该选取何种生产速度? 并求此最大利润.

22. (本小题满分 12 分)

已知 a 为常数, 二次函数 $f(x) = x^2 - ax + a + 3$.

(1) 若该二次函数的图象与 x 轴有交点, 求实数 a 的取值范围;

(2) 已知 $f(x) \geq 4$, 求 x 的取值范围;

(3) 若对任意的实数 $x \in [2, 4]$, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

参考答案

1. A 2. C 3. B 4. B 5. A 6. C 7. B 8. D
9. AC 10. BC 11. BC 12. ABD

13. $(-\infty, -\frac{3}{2})$ 14. $-\frac{1}{2}$ 15. $[2, 3]$ 16. 2 $[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}]$

17.

解析 (1) $\because$ 若不等式 $ax^2 + 5x - 2 > 0$ 的解集是 $\{x | \frac{1}{2} < x < 2\}$

$\therefore \frac{1}{2}, 2$ 是方程 $ax^2 + 5x - 2 = 0$ 的两根且 $a < 0$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2} + 2 = -\frac{5}{a} \\ \frac{1}{2} \times 2 = -\frac{2}{a} \end{cases} \text{ 解得 } a = -2 \text{ (满足 } a < 0) \therefore a \text{ 的值为 } -2.$$

(2) 不等式 $\frac{1-ax}{x+1} > a+5$ 即不等式 $\frac{1+2x}{x+1} > 3$, 即 $\frac{1+2x}{x+1} - 3 > 0$,

通分得 $\frac{x+2}{x+1} > 0$, 等价于 $(x+2)(x+1) > 0$, 解得 $-2 < x < -1$,

所以原不等式的解集为 $\{x | -2 < x < -1\}$.

18.

解析 (1) $a = -2$ 时 $B = \{x | -4 \leq x < 5\}$, 又 $A = \{x | 1 \leq x < 4\}$, $\therefore \complement_U A = \{x | x < 1 \text{ 或 } x \geq 4\}$

$B \cap A = \{x | 1 \leq x < 4\}$, $B \cap (\complement_U A) = \{x | -4 \leq x < 1 \text{ 或 } 4 \leq x < 5\}$.

(2) 若 $A \cup B = A$, 则 $B \subseteq A$

若 $B = \emptyset$, 则 $3 - a \leq 2a$, 解得 $a \geq 1$

$$\text{若 } B \neq \emptyset, \text{ 则 } \begin{cases} a < 1 \\ 2a \geq 1 \\ 3 - a \leq 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{1}{2} \leq a < 1,$$

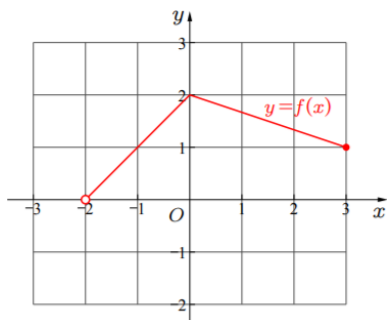
综上, 实数 a 的取值范围为 $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

19.

$$\text{解析 (1)} f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 < x \leq 0 \\ -\frac{1}{3}x+2, & 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

(2) 函数 $f(x)$ 的图象如右图所示.

(3) 由图得函数 $f(x)$ 的值域为 $(0, 2]$



20.

解析 (1) $\because x, y$ 均为正数, 且 $xy - (x + 4y) - 5 = 0 \therefore xy - 5 = x + 4y \geq 2\sqrt{x \cdot 4y} = 4\sqrt{xy}$

当且仅当 $\begin{cases} x = 4y \\ xy - (x + 4y) - 5 = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = 10 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$ 取 " $=$ "

$\therefore xy - 4\sqrt{xy} - 5 \geq 0 \therefore (\sqrt{xy} - 5)(\sqrt{xy} + 1) \geq 0 \therefore \sqrt{xy} \geq 5$, 即 $xy \geq 25$.

$\therefore xy$ 的最小值为 25.

(2) (方法一) $\because xy - (x + 4y) - 5 = 0 \therefore (x - 4)y = x + 5$

$\because x, y$ 均为正数 $\therefore x > 4 \therefore y = \frac{x+5}{x-4}$

$\therefore x + y = x + \frac{x+5}{x-4} = x + \frac{x-4+9}{x-4} = (x-4) + \frac{9}{x-4} + 5 \geq 2\sqrt{(x-4) \cdot \frac{9}{x-4}} + 5 = 11$

当且仅当 $x-4 = \frac{9}{x-4}$ 即 $x = 7$ 取 " $=$ ", 此时 $y = 4$

$\therefore x + y$ 的最小值为 11.

(方法二) $\because xy - (x + 4y) - 5 = 0 \therefore (x-4)(y-1) = 9$

又 $(x-4)y = x + 5$ 且 x, y 均为正数 $\therefore x > 4, y > 1$

$\therefore x + y = (x-4) + (y-1) + 5 \geq 2\sqrt{(x-4)(y-1)} + 5 = 2\sqrt{9} + 5 = 11$

当且仅当 $\begin{cases} (x-4) = (y-1) \\ (x-4)(y-1) = 9 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$ 取 " $=$ ",

$\therefore x + y$ 的最小值为 11.

21.

解析 (1) 要使生产该产品 2 小时获得的利润不低于 1 500 元, 求 x 的取值范围;

(2) 要使生产 480 千克该产品获得的利润最大, 问: 该厂应该选取何种生产速度? 并求此最大利润.

(1) 要使生产该产品 2 小时获得的利润不低于 1 500 元, 即 $50\left(5x - \frac{3}{x} + 1\right) \cdot 2 \geq 1500$

即 $5x - \frac{3}{x} - 14 \geq 0$, 即 $5x^2 - 14x - 3 \geq 0$, 即 $(x-3)(5x+1) \geq 0$, 解得 $x \geq 3$ 或 $x \leq -\frac{1}{5}$

又 $1 \leq x \leq 10$, 所以 $3 \leq x \leq 10$, 即 x 的取值范围为 $[3, 10]$.

(2) 生产 480 千克该产品所需时间为 $\frac{480}{x}$ 小时, 所获得的利润为 y 元, 则

$y = 50\left(5x - \frac{3}{x} + 1\right) \cdot \frac{480}{x} = 24000\left(-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} + 5\right)$

$= 24000\left[-3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{61}{12}\right] = -72000\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6}\right)^2 + 122000$

$\therefore$ 当 $\frac{1}{x} = \frac{1}{6}$ 即 $x = 6 \in [1, 10]$ 时, $y_{\max} = 122000$

答: 该厂应该选取 6 千克/时的生产速度, 此时利润最大, 最大利润为 122000 元.

22. 解析 (1) 若该二次函数的图象与 x 轴有交点, 则 $\Delta = a^2 - 4(a+3) \geq 0$

$$\therefore (a-6)(a+2) \geq 0 \therefore a \geq 6 \text{ 或 } a \leq -2$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围为 } (-\infty, -2] \cup [6, +\infty)$$

$$(2) \because f(x) = x^2 - ax + a + 3 \geq 4 \therefore x^2 - ax + a - 1 \geq 0 \text{ 即 } (x-1)[x-(a-1)] \geq 0$$

当 $a-1=1$ 即 $a=2$ 时, $(x-1)^2 \geq 0$, 解集为 $\mathbb{R}$;

当 $a-1 > 1$ 即 $a > 2$ 时, $x \leq 1$ 或 $x \geq a-1$

当 $a-1 < 1$ 即 $a < 2$ 时, $x \leq a-1$ 或 $x \geq 1$

综上, 当 $a=2$ 时, 不等式的解集为 $\mathbb{R}$; 当 $a > 2$ 时, 不等式的解集为 $(-\infty, 1] \cup [a-1, +\infty)$;

当 $a < 2$ 时, 不等式的解集为 $(-\infty, a-1] \cup [1, +\infty)$.

(3) 若对任意的实数 $x \in [2, 4]$, $f(x) = x^2 - ax + a + 3 \geq 0$ 恒成立, 即 $a(x-1) \leq x^2 + 3$ 恒成立,

$$\because x \in [2, 4] \therefore x-1 \in [1, 3] \therefore a \leq \left(\frac{x^2+3}{x-1}\right)_{\min}$$

$$\text{设 } t = x-1 \in [1, 3], \text{ 则 } x = t+1 \therefore \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{(t+1)^2+3}{t} = t + \frac{4}{t} + 2 \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} + 2 = 6$$

当且仅当 $t = \frac{4}{t}$ 即 $t = 2$ 取 " $=$ ", 此时 $x = 3$

$$\therefore a \leq \left(\frac{x^2+3}{x-1}\right)_{\min} = 6, \text{ 即 } a \text{ 的取值范围为 } (-\infty, 6].$$