江苏省无锡一中2020届高三数学十月月考

数学试题

2019．10

一、填空题（本大题共14小题，每小题5分，共70分，请将答案填写在答题卷相应的位置上.）

1．已知集合A＝{1，a^2}，B＝{－1，1，a}，A$\cup$B＝B，则实数a的值是_______.

2．已知复数z＝(1－2i)•i（i是虚数单位），则z的共轭复数在复平面内对应的点位于第_______象限.

3．已知$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}+\vec{b}$＝(1，$\sqrt{2}$)，则向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为_______.

4．函数$f(x)=(\frac{1}{2})^{-x^2+4x-3}$的值域为_______.

5．若命题"$\exists x\in$R，$x^2-ax+1<0$"是假命题，则实数a的取值范围是_______.

6.已知函数$f(x)$是定义在R上且周期为4的奇函数,当0＜x＜2时，$f(x)=2x-\sin\frac{\pi x}{2}$，

则$f(-\frac{9}{2})+f(6)$＝_______.

7．已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$($\omega$＞0，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$)，将$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后与函数$g(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{4})$的图象重合，则$\varphi$＝_______.

8．在△ABC中，A＝$\frac{\pi}{4}$，a＝$\sqrt{3}$，sinB＝$\frac{3}{5}$，则边c的长_______.

9．设$\alpha\in$(0，$\frac{\pi}{3}$)，满足$\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则$\cos(2\alpha+\frac{7\pi}{12})$的值为_______.

10．若函数$f(x)=x^2-ax+2a-4$的一个零点在(－2，0)区间内，另一个零点在(1，3)区间内，则实数a的取值范围为_______.

11．已知菱形ABCD边长为2，∠BAD＝120°，点E，F分别在边BC，DC上，BC＝3BE，DC＝λDF．若$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$＝1，则$\lambda$的值为_______.

12．若函数 $f(x)=x^2+(a+3)x+\ln x$ 在区间($\frac{1}{2}$，2)上存在唯一的极值点，则实数 a 的取值范围为_______.

13．若关于 x 的不等式 $x^3-3x^2+ax+b>0$，对任意的实数 $x\in$[1，4]，总存在实数 $b\in$[1，4]使不等式恒成立，则实数 a 的取值范围是_______.

14．方程 $x^2+\sqrt{2}x-1=0$ 的解可视为函数 $y=x+\sqrt{2}$ 的图像与函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像交点的横坐标．若方程 $x^4+ax-4=0$ 的各个实根 x_1，x_2，…，x_k (k≤4)所对应的点(x_i，$\frac{4}{x_i}$)（i＝1，2，…，k）均在直线 $y=x$ 的同侧，则实数 a 的取值范围是_______.

二、解答题（本大题共 6 小题，共计 90 分，请在答题纸指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

15．（本小题满分 14 分）

已知△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\sqrt{2}a\cos B=c\cos B+b\cos C$.

（1）求角 B 的大小；

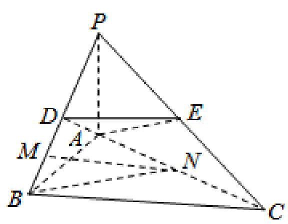
（2）设向量 $\vec{m}$＝(cosA，cos2A)，$\vec{n}$＝(12，－5)，求当 $\vec{m}\cdot\vec{n}$ 取最大值时，tanC 的值.

16．（本小题满分 14 分）

如图，在三棱锥 P—ABC 中，底面 ABC 为正三角形，PA⊥平面 ABC，PA＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$AC，点 D，E，N 分别为 PB，PC，AC 的中点，点 M 为 DB 的中点.

（1）求证：MN∥平面 ADE；

（2）求证：平面 ADE⊥平面 PBC.



17．（本小题满分 14 分）

记函数 $f(x)=\lg(1-ax^2)$ 的定义域、值域分别为集合 A，B．

（1）当 a＝1 时，求 A$\bigcap$B；

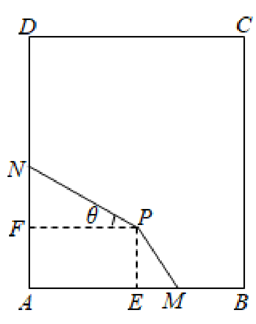
（2）若“$x\in$A”是“$x\in$B”的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围．

18．（本小题满分 16 分）

如图，长方形材料 ABCD 中，已知 AB＝$2\sqrt{3}$，AD＝4．点 P 为材料 ABCD 内部一点，PE⊥AB 于 E，PF⊥AD 于 F，且 PE＝1，PF＝$\sqrt{3}$．现要在长方形材料 ABCD 中裁剪出四边形材料 AMPN，满足∠MPN＝150°，点 M，N 分别在边 AB，AD 上．

（1）设∠FPN＝θ，试将四边形材料 AMPN 的面积 S 表示为θ的函数，并指明θ的取值范围；

（2）试确定点 N 在 AD 上的位置，使得四边形材料 AMPN 的面积 S 最小，并求出其最小值．



19．（本小题满分 16 分）

设函数 $f(x)=a^x-(k-1)a^{-x}$ (a＞0，a≠l)是定义域为 R 的奇函数.

（1）求 k 的值；

（2）若 $f(1)$＜0，证明函数 $f(x)$ 的单调性，并求使不等式 $f(x^2+tx)+f(4-x)$＜0 恒成立的 t 的取值范围；

（3）若 $f(1)=\dfrac{3}{2}$，$g(x)=a^{2x}+a^{-2x}-2f(x)$，求 $g(x)$ 在[1，$+\infty$)上的最小值.

20．（本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+bx+c}{e^x}$（$e$ 为自然对数的底数），$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数，且 $f'(1)=0$.

（1）求实数 c 的值；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线经过点(－1，0)，求 $f(x)$ 的极值；

（3）若关于 x 的不等式 $f(x)$≤2 对于任意的 $x\in[0，2]$恒成立，求实数 b 的取值范围.

参考答案

1．0　　2．四　　3．$\dfrac{2\pi}{3}$　　4．$[\dfrac{1}{2}，+\infty)$　　5．[－2，2]　　6．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$

7．$\dfrac{\pi}{12}$　　8．$\dfrac{7\sqrt{3}}{5}$　　9．$\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{30}}{8}$　　10．(0，2)　　11．2　　12．$(-\dfrac{15}{2}，-6]$

13．$a>0$　　14．$(-\infty，-6)\cup(6，+\infty)$

15．解：（1）由题意$\sqrt{2}sinAcosB=sinCcosB+cosCsinB$..

所以$\sqrt{2}sinAcosB=sin(B+C)=sin(\pi-A)=sinA$...

$\because 0<A<\pi$，$\therefore sinA\neq 0\therefore cosB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$...

$\because 0<B<\pi$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{4}$...

（2）$\because \vec{m}\cdot\vec{n}=12cosA-5cos2A$（3）

$\therefore \vec{m}\cdot\vec{n}=-10cos^2A+12cosA+5=-10(cosA-\dfrac{3}{5})^2+\dfrac{43}{5}$.

所以当$cosA=\dfrac{3}{5}$时，$\vec{m}\cdot\vec{n}$取最大值．

此时$sinA=\dfrac{4}{5}(0<A<\pi)\therefore tanA=\dfrac{4}{3}$.

$\therefore tanC=-tan(A+B)=-\dfrac{tanA+tanB}{1-tanAtanB}=7$.

16．

证明：（1）正三角形 ABC中，N为中点，则$BN\perp AC$，

又$PA\perp$平面ABC，$BN\subset$平面ABC，$PA\perp BN$，

又$PA\cap AC=A$，

$\therefore BN\perp$平面PAC．

（2）连结PN，交AE于G，连结DG，如图，

在$\triangle PAC$中，PN，AE都是中线，则$\frac{PG}{GN}=\frac{2}{1}$，

$\because$点D为PB的中点，点M为DB的中点，

$\therefore\frac{PD}{DM}=\frac{2}{1}$，

在$\triangle PMN$中，$\because\frac{PD}{DM}=\frac{PG}{GN}=\frac{2}{1}$，

$\therefore MN\parallel DG$，

又$\because MN\not\subset$平面ADE，$DG\subset ADE$，

$\therefore MN\parallel$平面ADE．

17．

解：（1）当$a=1$时，$f(x)=lg(1-x^2)$，由$1-x^2>0$，得$A=(-1,1)$．…（2分）

又$0<1-x^2\leqslant 1$，所以$B=(-\infty,0]$．…（4分）

故$A\cap B=(-1,0]$．…（6分）

（2）"$x\in A$"是"$x\in B$"的必要不充分条件$\Leftrightarrow B\subsetneqq A$．…（8分）

①当$a=0$时，$A=R$，$B=\{0\}$，适合题意；　…（9分）

②当$a<0$时，$A=R$，$B=[0,+\infty)$，适合题意；　…（11分）

③当$a>0$时，$A=(-\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}})$，$B=(-\infty,0]$，不适合题意．…（13分）

综上所述，实数a的取值范围是$(-\infty,0]$．…（14分）

18．

| 解：（1）在直角△NFP中，因为$PF=\sqrt{3}$，$\angle FPN=\theta$，

所以$NF=\sqrt{3}tan\theta$，

所以$S_{\triangle APN}=\frac{1}{2}NA\cdot PF=\frac{1}{2}$（$1+\sqrt{3}tan\theta$）$\times\sqrt{3}$． ………………………………

在直角△MEP中，因为PE，$\angle EPM=\frac{\pi}{3}-\theta$，

所以$ME=tan$（$\frac{\pi}{3}-\theta$），

所以$S_{\triangle APM}=\frac{1}{2}MA\cdot PE=\frac{1}{2}$（$\sqrt{3}+\sqrt{3}tan$（$\frac{\pi}{3}-\theta$））$\times1$． ………………………

所以$S=S_{\triangle APN}+S_{\triangle APM}=\frac{3}{2}tan\theta+\frac{1}{2}tan$（$\frac{\pi}{3}-\theta$）$+\sqrt{3}$，$\theta\in[0,\frac{\pi}{3}]$，………………

（注：定义域错误扣1分）

（2）因为$S=\frac{3}{2}tan\theta+\frac{1}{2}tan$（$\frac{\pi}{3}-\theta$）$+\sqrt{3}=\frac{3}{2}tan\theta+\frac{\sqrt{3}-tan\theta}{2(1+\sqrt{3}tan\theta)}+\sqrt{3}$． …

令$t=1+\sqrt{3}tan\theta$，由$\theta\in[0,\frac{\pi}{3}]$，得$t\in[1,4]$，……………（11分）

所以$S=\sqrt{3}+\frac{3t^2-4t+4}{2\sqrt{3}t}=\frac{\sqrt{3}}{2}$（$t+\frac{4}{3t}$）$+\frac{\sqrt{3}}{3}$………………（12分）

$\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\times\sqrt{t\times\frac{4}{3t}}+\frac{\sqrt{3}}{3}=2+\frac{\sqrt{3}}{3}$． ………………（14分）

当且仅当$t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，即$tan\theta=\frac{2-\sqrt{3}}{3}$时等号成立． ………………（15分）

此时，$AN=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$S_{min}=2+\frac{\sqrt{3}}{3}$．

答：当$AN=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，四边形材料$AMPN$的面积S最小，最小值为$2+\frac{\sqrt{3}}{3}$…………

19．

解：（1）∵f（x）是定义域为R的奇函数，∴f（0）$=0$，

∴$1-$（$k-1$）$=0$，∴$k=2$．

（2）∵函数f（x）$=a^x-a^{-x}$（$a>0$且$a\neq1$），

∵f（1）<0，∴$a-\frac{1}{a}<0$，又 $a>0$，

∴$1>a>0$．

由于$y=a^x$单调递减，$y=a^{-x}$单调递增，故f（x）在R上单调递减．

不等式化为f（x^2+tx）$<f$（$x-4$）．

∴$x^2+tx>x-4$，即 x^2+（$t-1$）$x+4>0$ 恒成立，

∴$\Delta=$（$t-1$）$^2-16<0$，解得$-3<t<5$．

（3）由f（1）$=\frac{3}{2}$得$a=2$，

则g（x）$=2^{2x}+2^{-2x}-2$（2^x-2^{-x}），

令$t=2^x-2^{-x}$，由$x\geqslant1$可得$t\geqslant\frac{3}{2}$，

则函数$y=t^2-2t+2=$（$t-1$）$^2+1$，

且在$[\frac{3}{2}$，$+\infty$）递增，

可得g（x）在$[1$，$+\infty$）上的最小值为（$\frac{3}{2}-1$）$^2+1=\frac{5}{4}$．

20．

解：（1）∵函数$f(x)=\frac{x^2+bx+c}{e^x}$，∴$f'(x)=\frac{-x^2+(2-b)x+b-c}{e^x}$，

∵f'（x）为f（x）的导函数，且f'（1）=0．

∴$\frac{-1+(2-b)+b-c}{e}=0$，

解得$c=1$．

（2）∵f（x）$=\frac{x^2+bx+1}{e^x}$，∴f（0）=1，

∵$f'(x)=\frac{-x^2+(2-b)x+b-1}{e^x}$，∴$f'$（0）$=b-1$，

∵f（x）在$x=0$处的切线方程的切线方程为$y-1=$（$b-1$），且过点（-1，0），

∴$b=2$，

∵$f'(x)=-\frac{(x-1)(x+1)}{e^x}$，令$f'$（$x$）=0，得$x=\pm1$，

列表如下：

x	$(-\infty，-1)$	-1	$(-1，1)$	1	$(1，+\infty)$
f'（x）	−	0	+	0	−
f（x）	↓	极小值	↑	极大值	↑

∴当$x=-1$时，f（x）取极小值f（-1）=0；当$x=1$时，f（x）取极大值f（1）$=\frac{4}{e}$．

（3）∵关于x的不等式f（x）≤2对于任意的$x\in[0，2]$恒成立，

∴$bx\leqslant 2e^x-$（x^2+1）在$x\in[0，2]$上恒成立，

当$x=0$时，0≤1成立，

当$x\in$（0，2]时，$b\leqslant\frac{2e^x}{x}-$（$x+\frac{1}{x}$）恒成立，

记g（x）$=\frac{2e^x}{x}-$（$x+\frac{1}{x}$），$x\in$（0，2]，

则g'（x）$=\frac{2e^x(x-1)}{x^2}-$（$1-\frac{1}{x^2}$）$=\frac{(x-1)(2e^x-x-1)}{x^2}$，

令h（x）$=2e^x-x-1$，$x\in$（0，2]，

则h'（x）$=2e^x-1>2e^0-1=1>0$，

∴h（x）在区间（0，2]上单调递增，

∴h（x）$>h$（0）$=2e^0-0-1=1>0$，∴$2e^x-x-1>0$在区间（0，2]上恒成立，

当$x\in$（0，2]，令g'（x）=0，得$x=1$，

∴g（x）在区间（0，1）上单调递减，在区间（1，2）上单调递增，

∴g（x）$_{max}=g$（1）$=2e-2$，∴$b\leqslant 2e-2$．

∴实数b的取值范围是（$-\infty$，$2e-2$]．