

无锡市辅仁高级中学 2021—2022 学年第二学期期中考试

高一数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设 $(1+i)x=1+yi$ ，其中 i 为虚数单位， x, y 是实数，则 $|x+yi| = (\quad)$

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

2. 设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是两个不共线的向量，若 $\vec{a} = \vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ 与 $\vec{b} = -\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2$ 共线，则实数 $\lambda = (\quad)$

- A. -1 B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

3. 在锐角中 $\triangle ABC$ ，角 A, B 所对的边长分别为 a, b . 若 $2a \sin B = \sqrt{3}b$, 则角 A 等于

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

4. 下列命题中正确 个数 为 $(\quad)$

- (1) 如果直线 $a \parallel b$ ，那么 a 平行于经过 b 的任何平面；
(2) 如果直线 a, b 和平面 α 满足 $a \parallel \alpha, b \parallel \alpha$ ，那么 $a \parallel b$ ；
(3) 如果直线 a, b 和平面 α 满足 $a \parallel b, a \parallel \alpha, b \not\subset \alpha$ ，那么 $b \parallel \alpha$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 已知复数 $z_1 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ (i 为虚数单位)，复数 z_1, z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称，则 $\frac{z_1}{z_2} =$

$(\quad)$

- A. $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ B. $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ C. $-\frac{7}{25} - \frac{24}{25}i$ D. $\frac{7}{25} + \frac{24}{25}i$

6. 已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1, O_2 ，过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形，则该圆柱的侧面积为 $(\quad)$

- A. 8π B. $8\sqrt{2}\pi$ C. 12π D. $10\sqrt{2}\pi$

7. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 为单位向量，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ ，向量 $\vec{c}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 共线，则 $|\vec{a} + \vec{c}|$ 的最小值为 $(\quad)$

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心（三条中线的交点）， $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ ， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2$ ，则 $|\overrightarrow{AG}|$ 的最小值为（ ）

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知复数 $z = 2 + i$ ，则下列结论正确的是（ ）

- A. $|z| = \sqrt{5}$ B. 复数 z 的共轭复数为 $2 - i$
C. $zi = 1 + 2i$ D. $z^2 = 3 + 4i$

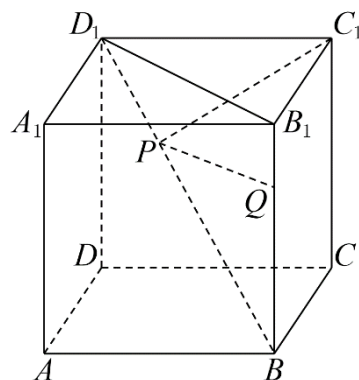
10. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 对边分别为 a, b, c ，若 $b = 2\sqrt{3}$ ， $c = 3$ ， $A + 3C = \pi$ ，则下列结论正确的是（ ）

- A. $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $a = 3$ D. $S_{\triangle ABC} = \sqrt{2}$

11. 在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 6$ ， BC 边上的高为 2，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的取值可能是（ ）

- A. -6 B. -3 C. 1 D. 2

12. 如图所示，在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， P, Q 分别为线段 BD_1, BB_1 上的动点（不包括端点），则下列说法正确的是（ ）



- A. 存在点 P, Q ，使得 $C_1P \parallel AQ$ B. 三棱锥 $D - QC_1D_1$ 的体积不变
C. 直线 A_1P 和直线 CQ 异面 D. $\triangle C_1PQ$ 周长的最小值为 $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{c} = (m, -1)$ ，若 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{c})$ ，则实数 $m =$ _____.

14. 已知复数 $z_n = i + i^2 + i^3 + \cdots + i^n$, n 为正整数, 记 z_n 所有可能取值 和为复数 z , 则 $z =$ _____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = \frac{2}{3}$, $AC = 4$, $BC = 3$, 则 $\sin B =$ _____.

16. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 实数 $\lambda_i \in \{-1, 2\}$ ($i = 1, 2, 3$), 则 $|\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC} - \lambda_3 \overrightarrow{AD}|$ 的最大值为 _____.

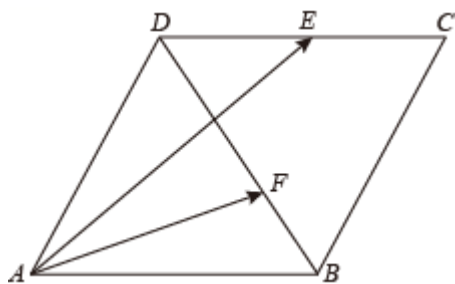
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知复数 $z_1 = a + 3i$ ($a \in \mathbf{R}$), $z_2 = 3 - i$, 且 $z_1 - z_2$ 为纯虚数.

(1) 求 a ;

(2) 若 $|z| = |z_2|$, 且 $z - z_1$ 实数, 求 z .

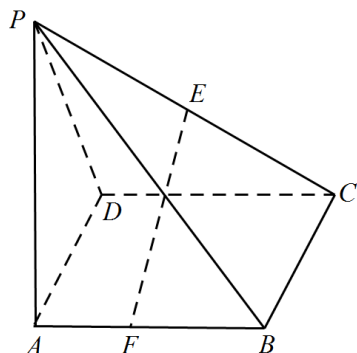
18. 如图, 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 1, 其中 $\angle DAB = 60^\circ$, 且 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FB}$, 记 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.



(1) 求 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$;

(2) $\cos \angle EAF$.

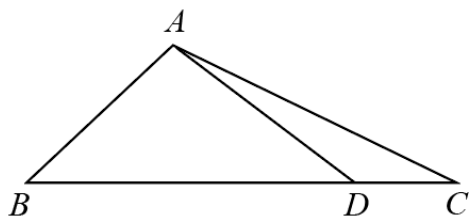
19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AB = 1$, $AD = 2$, E, F 分别为棱 PC, AB 中点.



(1) 证明: $EF \parallel$ 平面 ADP ;

(2) 点 G 为底面四边形内的一动点 (包括边界), 且平面 $GEF \parallel$ 平面 ADP , 求 FG 的最大值.

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b = \sqrt{5}, c = \sqrt{2}, \angle B = 45^\circ$.



(1) 求边 BC 的长;

(2) 在边 BC 上取一点 D , 使得 $\cos \angle ADB = \frac{4}{5}$, 求 $\sin \angle DAC$ 的值.

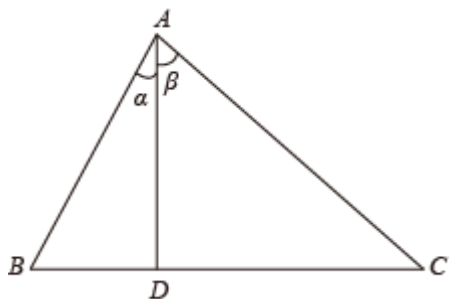
21. 已知 $\overrightarrow{OA} = (2, 4)$, $\overrightarrow{OB} = (m, n)$, $\overrightarrow{OC} = (6, 0)$, 点 O 为坐标原点.

(1) 若 A, B, C 三点共线, 且 $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$, 求 $\overrightarrow{OB}$;

(2) 若 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$, 求 $|\overrightarrow{OB}|$ 的最小值.

22. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . D 为 BC 边上一点, 记 $\angle DAB = \alpha$,

$\angle DAC = \beta$. 向量 $\vec{m} = (b, c - a)$, $\vec{n} = (b - c, a + c)$, $\vec{m} \perp \vec{n}$.



(1) 若 $\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{AC}$, 请比较 α 与 β 的大小;

(2) 若 $\sin \beta = 2 \sin \alpha$, 且 $AD = \sqrt{7}$, 求 $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ 的最小值.