

高三数学

2021. 01

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

1. 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{-x^2 - x + 2}\}$, $B = \{x | 4^x > \frac{1}{2}\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $[-2, -\frac{1}{2})$ B. $[-1, -\frac{1}{2})$ C. $(-\frac{1}{2}, 1]$ D. $(-\frac{1}{2}, 2]$

2. 已知 a 是实数，则复数 $(a^2 - 2a) + (a^2 + a - 6)i$ 为纯虚数的充要条件是

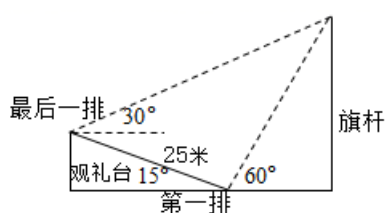
- A. $a=0$ 或 $a=2$ B. $a=0$
C. $a \in \mathbb{R}$, 且 $a \neq 2$ 且 $a \neq -3$ D. $a \in \mathbb{R}$, 且 $a \neq 2$

3. 国庆阅兵式上举行升旗仪式，在坡度为 15° 的观礼台上，某一系列座位与旗杆在同一个垂直于地面的平面上，某同学在该列的第一排和最后一排测得旗杆顶端的仰角分别为 60° 和 30° ，第一排和最后一排的距离为 25 米，则旗杆的高度约为 $(\sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{6} \approx 2.449)$

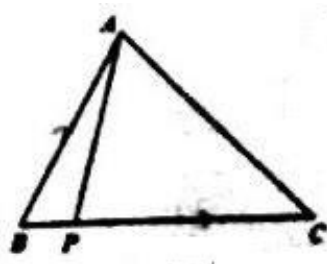
- A. 17 米 B. 22 米 C. 31 米 D. 35 米

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BC=6$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 12$, 点 P 为边 BC 上的一动点，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最小值为

- A. -4 B. -3 C. $-\frac{9}{4}$ D. 0



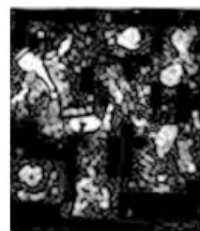
第 3 题



第 4 题

5. 如图，《宋人扑枣图轴》是作于宋朝的中国古画，现收藏于中国台北故宫博物馆．有甲、乙、丙三人想根据该图编排一个舞蹈，首先由他们来选取该图中小孩扑枣的爬、扶、捡、顶、摇中的五个动作，每人至少模仿一个动作，且爬、扶、捡、顶、摇都要被依序模仿到，则选择的方案共有

- A. 60 种 B. 90 种 C. 100 种 D. 150 种



6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线均和圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 相切，且

双曲线的右焦点为圆 C 的圆心，则该双曲线的方程为

- A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ D. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$

7. 一种药在病人血液中的量保持 3000mg 以上才有效，现给某病人注射了这种药 5000mg，如果药在血液中以每小时 20% 的比例衰减，为了充分发挥药物的利用价值，那么从现在起经过约()小时向病人的血液补充这种药，才能保持疗效. ($\lg 2 = 0.301$, $\lg 3 = 0.4771$)
A. 2.3 小时 B. 3.5 小时 C. 5.6 小时 D. 8.8 小时

8. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，若对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$ ，有 $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$ ，

则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有性质 P. 设 $f(x)$ 在 $[1, 2021]$ 上具有性质 P，则一定有

A. $f(x)$ 在 $[1, 2021]$ 上图象是连续不断的

B. $f(x^2)$ 在 $[1, \sqrt{2021}]$ 上具有性质 P

C. $f(x) \geq f(1011)$

D. 对任意的 $x_1, x_2, x_3 \in [1, 2021]$ ，有 $f(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分. 在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

9. 下列命题中是真命题的是

A. 在四边形 ABCD 中，若 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ ，且 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ ，则四边形 ABCD 是菱形

B. 若点 G 为 $\triangle ABC$ 的外心，则 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

C. 向量 $\vec{e}_1 = (2, -3)$ ， $\vec{e}_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ 能作为平面内的一组基底

D. 若 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内任一点，且满足 $(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}) = 0$ ，则 $\triangle ABC$

为等腰三角形

10. 已知点 P(1, -1) 是角 α 终边上的一点，则

A. $\frac{\alpha}{2}$ 一定是第一象限的角

B. 若 $\sin(\beta + \alpha) = \frac{3}{5}$ ，则 $\sin 2\beta = \frac{7}{25}$

C. 函数 $g(x) = \cos(3x + \alpha + \frac{5\pi}{4})$ 是奇函数

D. 将函数 $f(x) = \sin(2x + \alpha)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位可以得到 $g(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$ 的图像

11. 设 $x, y \in \mathbb{R}_+$ ， $S = x + y$ ， $P = xy$ ，以下四个命题中正确的是

A. 若 P 为定值 m ，则 S 有最大值 $2\sqrt{m}$

B. 若 $S^2 \geq kP$ 总成立，则 k 的取值范围为 $k \leq 4$

C. 若 $S = P$ ，则 S 有最小值 4

D. 若 $S=P$, 则 P 有最大值 4

12. 已知 $(x+2)^7 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + a_3(x+1)^3 + \cdots + a_6(x+1)^6 + a_7(x+1)^7$, 则

A. $a_5 = 21$

B. $\sum_{i=0}^7 (-1)^i a_i = 0$

C. $\sum_{i=1}^7 i a_i = 448$

D. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_7$ 这 8 个数中 a_6 最大

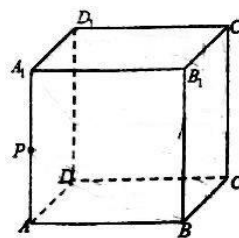
三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上)

13. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = a \times 3^n - 2$, 则 $a =$ _____.

14. 某校一次高三数学统计, 经过抽样分析, 成绩 X 近似服从正态分布 $N(110, \sigma^2)$, 且 $P(90 \leq X \leq 110) = 0.3$, 该校有 1000 人参加此次统考, 估计该校数学成绩不低于 130 分的人数为 _____.

15. 我们称点 P 到图像 C 上任意一点距离的最小值为点 P 到图像 C 的最小距离, 记作 $d(P, C)$, 则点 $P(3, 0)$ 到抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的距离 $d(P, C)$ 是 _____.

16. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, P 是 AA_1 的中点, Q 是侧面正方形 BB_1C_1C 内的动点, 当 $D_1Q \parallel$ 平面 PBD 时, 点 Q 的轨迹长度为 _____, 若点 Q 轨迹的两端点和点 C_1, D_1 在球 O 的球面上, 则球 O 的体积为 _____.



第 16 题

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共计 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $(c-b)\sin C = a\sin A - b\sin B$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $b=5, a=7$, 求 $\cos C$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1 = 2$, 且 $a_2, a_3 + 2, a_4$ 成等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足:

$$b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \cdots + \frac{b_n}{n} = \frac{n^2 + n}{2} (n \in \mathbb{N}^*).$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求证: $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{2 \cdot a_2} + \frac{b_3}{3 \cdot a_3} + \cdots + \frac{b_n}{n \cdot a_n} < 2$.

19. (本小题满分 12 分)

近年来,我国肥胖人群的规模急速增长,肥胖人群有着很大的健康隐患.目前,国际上常用身体质量指数(英文为 Body Mass Index,简称 BMI)来衡量人体胖瘦程度以及是否健康,其计算公式是 $BMI = \frac{\text{体重(单位: kg)}}{\text{身高}^2(\text{单位: m}^2)}$,中国成人的 BMI 数值标准为: BMI < 18.5 为偏瘦; $18.5 \leq BMI < 23.9$ 为正常; $24 \leq BMI < 27.9$ 为偏胖; BMI ≥ 28 为肥胖.某地区随机调查了 100 名 35 岁以上成人的身体健康状况,测量身高、体重并计算 BMI 数值.

(1) 根据调查结果制作下面的 2×2 列联表,并判断能否有 99% 的把握认为 35 岁以上成人肥胖与不经常运动有关?

	肥胖	不肥胖	总计
经常运动员工		40	60
不经常运动员工	24		40
总计			100

参考公式: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

参考数据:

$P(K^2 \geq k)$	0.25	0.10	0.050	0.010	0.005	0.001
k	1.323	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

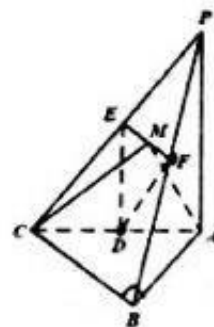
(2) 如果视样本的频率视为概率,现随机地从这个地区抽取经常运动人群中的 3 人,不经常运动人群中的 1 人座谈,记这 4 人中肥胖人数为 X,求 X 的分布列和数学期望.

20. (本小题满分 12 分)

如图所示,三棱锥 P—ABC 中, $PA \perp$ 平面 ABC, $AB \perp BC$, 平面 α 经过棱 PC 的中点 E, 与棱 PB, AC 分别交于点 F, D, 且 $BC \parallel$ 平面 α , $PA \parallel$ 平面 α .

(1) 证明: $AB \perp$ 平面 α ;

(2) 若 $AB = BC = PA = 2$, 点 M 是直线 EF 上的动点, 求平面 MAC 与平面 PBA 所成锐二面角的余弦值的最大值.

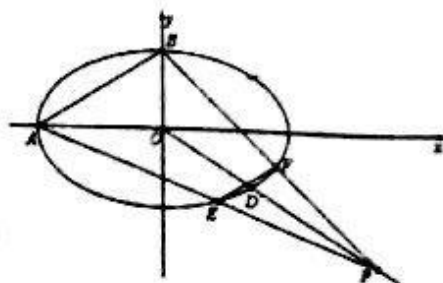


21. (本小题满分 12 分)

如图所示, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点和上顶点分别为 A, B, $D(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 为椭圆上一点, 且 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 若 P 为线段 OD 延长线上一点, 直线 PA 交椭圆于另外一点 E, 直线 PB 交椭圆于另外一点 F. ①求直线 PA 与 PB 的斜率之积; ②试判断 $\triangle PEF$ 和 $\triangle PAB$ 的面积之比是否为 $\frac{PF^2}{PB^2}$? 说明理由.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x-1)e^x + (a^2 + a + 1)x + a^2 + a$.

(1) 求实数 a 的值, 使得倾斜角为 45° 、在 y 轴上截距为 -1 的直线 l 是函数 $y = f(x)$ 图象的切线;

(2) 若对于任意实数 a, 不等式 $f(x) > 0$ 在 $[x_0, +\infty)$ ($x_0 \in \mathbb{Z}$) 上都成立, 求 x_0 的最小值.

参考答案

- | | | | | | | | |
|-------|------|---------|------|-----------------|------|--------------------------------|------|
| 1. C | 2. B | 3. C | 4. A | 5. D | 6. A | 7. A | 8. D |
| 9. AD | | 10. BD | | 11. BC | | 12. ABC | |
| 13. 2 | | 14. 200 | | 15. $2\sqrt{2}$ | | 16. $\sqrt{5}, \frac{9\pi}{2}$ | |

17. 解: (1) $\because (c-b)\sin C = a\sin A - b\sin B$

$$\therefore (c-b)c = a^2 - b^2$$

$$\text{即 } b^2 + c^2 - a^2 = bc$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{又 } \because A \in (0, \pi)$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) $\because b=5, a=7, \text{且 } b^2 + c^2 - a^2 = bc$

$$\therefore 25 + c^2 - 49 = 5c$$

$$\text{即 } c^2 - 5c - 24 = 0$$

$$\text{解得 } c = 8 \text{ (负值已舍去)}$$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + 25 - 64}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}$$

$$\therefore \cos C \text{ 的值为 } \frac{1}{7}.$$

18. 解: (1) $\because a_2, a_3 + 2, a_4$ 成等差数列.

$$\therefore 2(a_3 + 2) = a_2 + a_4.$$

$$\therefore a_1 = 2$$

$$\therefore a_3 = a_1 q^2 = 2q^2, a_2 = a_1 q = 2q, a_4 = a_1 q^3 = 2q^3$$

$$\therefore 2(2q^2 + 2) = 2q + 2q^3$$

$$\text{化简得: } 2(q^2+1) = q(q^2+1)$$

$$\therefore q = 2$$

$$\therefore a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$\therefore b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \dots + \frac{b_n}{n} = \frac{n^2+n}{2} \quad ①$$

$$\therefore b_1 = 1, b_1 + \frac{b_2}{2} = 3, \text{ 得 } b_2 = 4$$

$$\text{且 } b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \dots + \frac{b_{n-1}}{n-1} = \frac{n^2-n}{2} \quad ②$$

$$① - ② \text{ 得: } \frac{b_n}{n} = n, b_n = n^2, n \geq 2$$

经检验 $n=1$ 时, 上式也成立.

$$\therefore n \in \mathbb{N}^* \text{ 时, } b_n = n^2$$

综上所述, $a_n = 2^n, b_n = n^2$.

$$(2) \frac{b_n}{na_n} = \frac{n^2}{n \cdot 2^n} = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{令 } T_n = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{2a_2} + \frac{b_3}{3a_3} + \dots + \frac{b_n}{na_n}$$

$$\text{即 } T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\frac{1}{2} T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\therefore \frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n]}{1 - \frac{1}{2}} - n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{2^n}$$

$$\therefore T_n = 2 - \frac{2+n}{2^n} < 2, \text{ 故 原不等式成立.}$$

19. (本小题满分 12 分)

【解】(1) 填表如下:

	肥胖	不肥胖	合计
经常运动员工	20	40	60
不经常运动员工	24	16	40
合计	44	56	100

..... 2 分

$$\text{所以 } K^2 = \frac{100(20 \times 16 - 24 \times 40)^2}{60 \times 40 \times 44 \times 56} = 6.926.$$

..... 5 分

因为 $6.926 > 6.635$, 所以有 99% 的把握认为肥胖与不经常运动有关. 6 分

$$(2) \text{“经常运动且不肥胖” 的频率为 } \frac{40}{100} = \frac{2}{5}.$$

..... 8 分

现随机抽取 3 人, “经常运动且不肥胖” 的人数为 X 可能的取值为 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = C_3^0 (1-\frac{2}{5})^3 (\frac{2}{5})^0 = \frac{27}{125}, \quad P(X=1) = C_3^1 (1-\frac{2}{5})^2 (\frac{2}{5})^1 = \frac{54}{125},$$

$$P(X=2) = C_3^2 (1-\frac{2}{5})^1 (\frac{2}{5})^2 = \frac{36}{125}, \quad P(X=3) = C_3^3 (1-\frac{2}{5})^0 (\frac{2}{5})^3 = \frac{8}{125}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$$\text{所以 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{27}{125} + 1 \times \frac{54}{125} + 2 \times \frac{36}{125} + 3 \times \frac{8}{125} = \frac{8}{125} = \frac{6}{5}. \quad \dots 12 \text{ 分}$$

20. (1) 因为 $BC \parallel$ 平面 α , $BC \subset$ 平面 PBC , 平面 $\alpha \cap$ 平面 $PBC = EF$,

所以 $BC \parallel EF$, 且 F 为棱 PB 的中点.

因为 $BC \perp AB$, 所以 $EF \perp AB$.

同理, 因为 $PA \parallel$ 平面 α , $PA \subset$ 平面 PAC , 平面 $\alpha \cap$ 平面 $PAC = DE$,

所以 $PA \parallel DE$.

因为 $PA \perp$ 平面 ABC ,

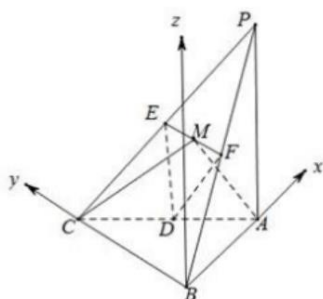
所以 $PA \perp AB$,

所以 $DE \perp AB$, 又 $DE \cap EF = E$,

所以 $AB \perp$ 平面 DEF ,

即 $AB \perp$ 平面 α .

(2) 如图所示, 以点 B 为坐标原点, 分别以 BA , BC 所在直线为 x , y 轴, 过点 B 且与 AP 平行的直线为 z 轴建立空间直角坐标系,



则 $B(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $C(0,2,0)$, $P(2,0,2)$, $E(1,1,1)$, $F(1,0,1)$,

$\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{BP} = (2, 0, 2)$, 设 $M(1, t, 1)$,

则 $\overrightarrow{AM} = (-1, t, 1)$, 设平面 MAC 的一个法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AC} = -2x_1 + 2y_1 = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AM} = -x_1 + ty_1 + z_1 = 0. \end{cases} \text{ 令 } x_1 = 1, \text{ 则 } y_1 = 1, z_1 = 1 - t,$$

所以 $\vec{m} = (1, 1, 1 - t)$ 为平面 MAC 的一个法向量.

设平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 2y_2 = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BP} = 2x_2 + 2z_2 = 0, \end{cases}$$

则 $y_2 = 0$, 令 $x_2 = 1$, 则 $z_2 = -1$,

所以 $\vec{n} = (1, 0, -1)$ 为平面 PBC 的一个法向量.

设平面 MAC 与平面 PBC 所成的锐二面角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{|1 - (1-t)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (1-t)^2} \times \sqrt{2}} = \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - 2t + 3} \times \sqrt{2}}.$$

当 $t=0$ 时, $\cos \theta = 0$; 当 $t \neq 0$ 时,

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{t^2} - \frac{2}{t} + 1} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}} \times \sqrt{2}},$$

当且仅当 $\frac{1}{t} = \frac{1}{3}$, 即 $t=3$ 时, $3\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$ 取得最小值 $\frac{2}{3}$,

$$\cos \theta \text{ 取得最大值, 最大值为 } \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以平面 MAC 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21. 解: (1) $\because D(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 在椭圆上

$$\therefore \frac{2}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1 \quad ①$$

$$\text{又 } \because e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{又 } \because a^2 = b^2 + c^2$$

$$\therefore a = 2b. \quad ②$$

由 ①, ② 得: $b=1, a=2$

$\therefore$ 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) ① 直线 $OD: y = -\frac{1}{2}x$

设 $P(2P, -P), P > 0$.

$A(-2, 0), B(0, 1)$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{-P}{2P+2} \cdot \frac{P-1}{-2P} = \frac{1}{4}.$$

$\therefore$ 直线 PA, PB 的斜率之积为 $\frac{1}{4}$.

②. 设直线 $PB: y = k_1x + 1$.

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ y = k_1x + 1 \end{cases} \text{ 整理得: } x^2 + 4(k_1x + 1)^2 = 4$$

$$\therefore F\left(-\frac{8k_1}{1+4k_1^2}, \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2}\right)$$

设直线 $PA: y = k_2(x+2)$

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ y = k_2(x+2) \end{cases} \text{ 整理得: } x^2 + 4(k_2x + 2k_2)^2 = 4$$

$$\therefore E\left(\frac{2-8k_2^2}{1+4k_2^2}, \frac{4k_2}{1+4k_2^2}\right)$$

由 ① 知 $k_1k_2 = \frac{1}{4}$, 将 $k_2 = \frac{1}{4k_1}$ 代入 E 点坐标,

$$\begin{aligned} & \text{得 } E\left(\frac{8k_1^2-2}{4k_1^2+1}, \frac{4k_1}{4k_1^2+1}\right) \\ \therefore k_{EF} &= \frac{\frac{4k_1}{4k_1^2+1} - \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2}}{\frac{8k_1^2-2}{4k_1^2+1} + \frac{8k_1}{1+4k_1^2}} = \frac{1}{2} \\ \text{又 } \because k_{AB} &= \frac{1}{2} \quad \therefore k_{EF} = k_{AB} \\ \therefore EF &\parallel AB \\ \therefore \triangle PEF \text{ 和 } \triangle PAB \text{ 面积之比为 } &\frac{PF^2}{PB^2}. \end{aligned}$$

22. (1) 依题意得, 直线 l 的斜率 $k = \tan \alpha = 1$

又: l 在 y 轴上截距为 -1

设 $y = kx + b$, 则 $b = -1$, 则 $l: y = x - 1$

$\because l$ 是函数图像的切线, 设切点为 (x_0, y_0)

$$\text{则 } (x_0 - 1)e^{x_0} + (a^2 + a + 1)x_0 + a^2 + a = x_0 - 1$$

$$\text{即求 } (x_0 - 1)e^{x_0} + (a^2 + a)x_0 + a^2 + a + 1 = 0 \quad \dots (1)$$

又切线斜率为 1 , $f'(x) = e^x + (x - 1)e^x + (a^2 + a + 1)$

$$\text{则 } e^{x_0} + (x_0 - 1)e^{x_0} + (a^2 + a + 1) = 1 \quad \dots (2)$$

联立 (1) (2) 可得 $x_0 = 0$, 则 $a = 0$ 或 -1

(2) 由题意, $f(x) = xe^x + (a^2 + a + 1)$

由上式, 显然, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调

递增 又: $f(0) = -1 + a^2 + a$ 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(0) = -\frac{3}{4} < 0$

$\therefore x_0 > 0$, 又: $f(1) = 2a^2 + 2a + 1 > 0$ 恒成立

$\therefore x_0 \leq 1$ 又: x_0 为整数 $\therefore x_0 = 1$