

江苏省无锡辅仁高级中学 2019—2020 学年高二下学期期中考试数学 试题

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{x | 1 < 2^x < 4\}$, 则 $A \cap B =$ ()
- A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{1\}$ C. $\{-1, 1\}$ D. $\{0, 1\}$
2. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 则“ $x = y$ ”是“ $|x + 3| = |y + 3|$ ”的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 则其渐近线方程为
- A. $y = \pm \sqrt{2}x$ B. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ C. $y = \pm \frac{1}{2}x$ D. $y = \pm 2x$
4. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 若 $a = 2b \cos C$, 则此三角形一定是
- A. 等腰三角形 B. 直角三角形
- C. 等腰直角三角形 D. 等腰三角形或直角三角形
5. 已知 $a = \log_3 \frac{9}{2}$, $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{6}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$
6. 已知 $(1 - 3x)^9 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_9x^9$, 则 $|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_9|$ 等于 ()
- A. 2^9 B. 4^9 C. 3^9 D. 1
7. 若 x_0 是函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x^{\frac{1}{3}}$ 的零点, 则 x_0 属于区间 ().
- A. $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ C. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$
8. 已知函数 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ 的图象向左平移 $\varphi \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 个单位后, 其图象关于 y 轴对称, 则 φ 的值为 ()

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

9. 已知双曲线的中心在原点，离心率为 $\sqrt{3}$ ，若它的一条准线与抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线重合，则该双曲线与抛物线 $y^2 = 4x$ 的交点到原点的距离是（ ）

- A. $2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ B. $\sqrt{21}$ C. $18 + 12\sqrt{2}$ D. 21

10. 已知函数 $h(x) = \frac{m}{e^x} + e^x$ 在区间 $[0, 1]$ 上不单调，则实数 m 的取值范围为（ ）

- A. $[1, e]$ B. $(1, e)$ C. $[1, e^2]$ D. $(1, e^2)$

11. 从5位男教师和4位女教师中选出3位教师，派到3个班担任班主任（每班1位班主任），要求这3位班主任中男、女教师都要有，则不同选派方案共有

- A. 210种 B. 420种 C. 630种 D. 840种

12. 在 $\square ABC$ 中， $AB = 2$ ， D, E 分别是边 AB ， AC 的中点， CD 与 BE 交于点 O ，若 $OC = \sqrt{3}OB$ ，则 $\square ABC$ 面积的最大值为（ ）

- A. $\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{3}$ C. $6\sqrt{3}$ D. $9\sqrt{3}$

二、填空题

13. 已知 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = e^{3x}$ ，则 $f(-\ln 2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 若对于任意的实数 x ，有 $x^3 = a_0 + a_1(x-3) + a_2(x-3)^2 + a_3(x-3)^3$ ，则 $a_1 + a_2 + a_3$ 的值为_____.

15. 已知正实数 x, y 满足 $x + 3y = 9$ ，则 $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 的最大值是_____.

16. 规定，若函数 $f(x)$ 在定义域 $[m, n]$ ($1 < m < n$) 上的值域是 $[m^3, n^3]$ ，则称该函数为“绅士风度”函数.

已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 为“绅士风度”函数，则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

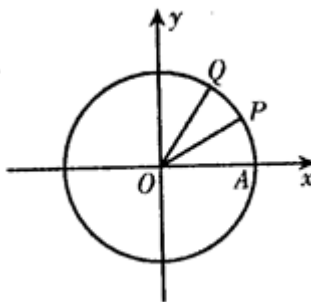
17.

如图，设 A 是单位圆和 x 轴正半轴交点， P, Q 是单

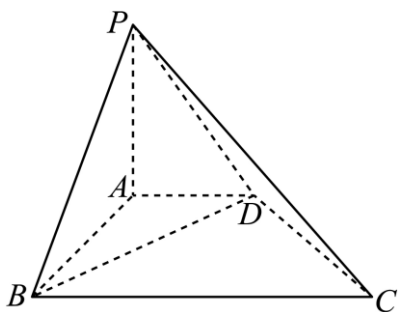
位圆上的两点， D 是坐标原点， $\angle AOP = \frac{\pi}{6}$ ， $\angle AOQ = \alpha$ ， $\alpha \in [0, \pi)$.

(I) 若 $Q(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ ，求 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{6})$ 的值；

(II) 设函数 $f(\alpha) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$, 求 $f(\alpha)$ 的值域.



18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \perp AD$, $AD \parallel BC$, $AP=AB=AD=1$.



(1) 若直线 PB 与 CD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$ 求 BC 的长;

(2) 求二面角 $B-PD-A$ 的余弦值.

19. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a = b \cos C + c \sin B$.

(1) 求 B 的值;

(2) 已知 $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3}$, 求 a .

20. 将名为《高等代数》、《数学分析》、《概率论》和《复变函数》的 4 本不同的书随机放入甲、乙、丙、丁 4 个书包中.

(1) 求 4 本书恰好放在 4 个不同书包中 概率;

(2) 随机变量 X 表示放在丙书包中书的本数, 求 X 的概率分布和数学期望 $E(X)$.

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $O(0, 0)$, 若 $\triangle OAB$ 面积为 1, 且过右

焦点 F 垂直于 x 轴的直线被椭圆 C 截得的线段长为 1.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 P 是椭圆 C 上一点, 直线 PA 与 y 轴交于点 M , 直线 PB 与 x 轴交于点 N , 试问 $|AN||BM|$ 是否为定值, 若是, 求出该定值, 若不是, 请说明理由.

22. 已知函数 $f(x) = mx^{-1} \ln x + n$.

(1) 若 $m=1$, $n=0$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $m=1$, $n=1$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[2a, 4a]$ 上的最小值;

(3) 某高二学习研究小组通过研究发现: 总存在正实数 $a, b (a < b)$, 使等式 $a^b = b^a$ 成立. 试问: 他们的研究成果是否确? 若正确, 请写出 a, b 的取值范围; 若不正确, 请说明理由

