

2020~2021 学年度第一学期江苏省锡山高级中学期中考试

高一数学试卷

一、单项选择题：共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 集合 $N = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-1, 1, 2\}$ C. $\{-1, 0, 2\}$ D. $\{-2, 0, 1\}$

2. 命题“ $\forall x \in [2, +\infty), x^2 \geq 4$ ”的否定形式为 ()

- A. $\forall x \in [2, +\infty), x^2 < 4$ B. $\forall x \in [-\infty, 2), x^2 < 4$

- C. $\exists x \in [2, +\infty), x^2 < 4$ D. $\exists x \in [-\infty, 2), x^2 < 4$

3. 若函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m(m-2)-3}$ 是幂函数, 且图像关于原点对称, 则实数 m 为 ()

- A. 2 B. -1 C. 4 D. 2 或 -1

4. 命题“ $\forall x \in [1, 2], -2x^2 + m, 0$ ”为真命题的一个充分不必要条件是 ()

- A. $m, 1$ B. $m, 2$ C. $m, 3$ D. $m, 4$

5. 为了防止新冠疫情输入校园.省锡中后勤采用喷洒消毒对学校教学区域何物体表面进行消毒.喷洒后该药

品浓度 C 随时间 t 变化关系为 $C = \frac{12t}{t^2 + 4}$, 则一段时间后药品的最大浓度为 ()

- A. 4mg/L B. 3mg/L C. 2mg/L D. 1mg/L

6. 已知函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 是定义在 R 上 函数, $h(x) = f(x) + 2g(x)$, 则“函数 $y = h(x)$ 为

偶函数”是“函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 均为偶函数”的 ()

- A. 充要条件 B. 充分而不必要条件
C. 必要而不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $y = f(x+1)$ 为奇函数, 若函数 $g(x) = \frac{4}{x-1}$ 与 $y = f(x)$ 的图象在 $x \in [-1, 3)$ 的交点为

$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_5, y_5)$, 则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 =$ ()

- A. 1 B. -2 C. 2 D. 3

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x - 3|, & x \geq a \\ ax - 11, & x < a \end{cases}$, 对于任意两个不相等的实数 $x_1, x_2 \in R$, 都有不等式

$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ 成立, 则实数 a 取值范围是 ()

- A. $[3, +\infty)$ B. $[0, 3]$ C. $[3, 4]$ D. $[2, 4]$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.

9. 下列函数在其定义域中, 既是奇函数又是增函数的 ()

- A. $y = x^{-\frac{2}{3}}$ B. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ C. $y = 2^x + 1$ D. $y = x^3$

10. 下列命题为真命题的是 ()

A. $\forall x \in \mathbf{R}, e^x > x^2$

B. $\exists x \in \mathbf{N}, \sqrt{x^2 + 1} \in \mathbf{N}$

C. 存 $0 < b < a$, 等式 $18^a = 19^b$ 成立

D. $\exists a \in \mathbf{R}$, 使得函数 $f(x) = |x^2 - 2ax + b|$ 为偶函数

11. 十六世纪中叶, 英国数学家雷科德在《砺智石》一书中首先把“=”作为等号使用, 后来英国数学家哈利奥特首次使用“<”和“>”符号, 并逐渐被数学界接受, 不等号的引入对不等式的发展影响深远. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则下列命题正确的是 ()

A. 若 $a > b$, 则 $-\frac{c^2}{a-b} > 0$

B. 若 $a > b > c > 0$, 则 $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

C. 若 $a > b > 0, c > 0$, 则 $\frac{a}{b} < \frac{b+ac}{a+bc}$

D. 若 $a > b > 0, c < 0$, 则 $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$

12. 对于函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + ax + b$ (其中 $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{Z}$) 其中, 选取 a, b 一组计算 $f(1)$ 和 $f(-1)$,

所得的正确结果可能是 ()

A. 4 和 6

B. 3 和 1

C. 2 和 4

D. 1 和 2

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x(x+4), & x \geq 0 \\ x(x-4), & x < 0 \end{cases}$, 则 $f(-1) + f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 不等式 $\frac{8}{x-1} > 1$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知 $A = \{y | y = x + \sqrt{2-x}\}$, $B = \{y | y = x^2 - 2mx + 1\}$, 若 $A \cap B$ 中有且只有三个整数, 则正数 m

的取值范围为___.

16. 已知正数 x, y, z 满足 $0 < x < 1, 4y + z = 2$, 则 $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{xyz}$ 的最小值___.

四、解答题：共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (1) 已知： $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$, 求 $\frac{a^2 + a^{-2} - 7}{a + a^{-1} + 3}$ 的值；

(2) 求值： $2\lg 2 + (\log_{25} 10)^{-1} + 4^{\log_2 3}$.

18. 已知集合 $A = \{x | 1 - m \leq x \leq 1 + m\}$.

(1) 当 $m = 2$ 时，求 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B$ ；

(2) 若 $A \cap B = A$ ，求实数 m 取值范围.

试从以下两个条件中任取一个补充在以上的问题中，并完成解答.

① 不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x+6} < 16$ 的解集 B ；

② 不等式 $|x - \frac{3}{2}| < \frac{7}{2}$ 解集为 B .

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答给分.

19. 已知定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x) = a + \frac{2}{3^x + 1}$ 是奇函数.

(1) 求实数 a 的值；

(2) 若不等式 $mf(x) > 3^x$ 在 $(0, +\infty)$ 有解，求实数 m 取值范围.

20. 设函数 $f(x) = ax^2 + 3x + 2, a \in \mathbb{R}$.

(1) 若关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 无实数解，求实数 a 的取值范围；

(2) 求关于 x 的不等式 $f(x) > (a+2)x + 3$ 的解集.

21. 已知定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $y = f(x)$ 满足 $f(x) + f(-x) = 0$, 当 $x \geq 0$ 时 $f(x) = \sqrt{x+4} + a(x-1)$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式；

(2) 运用函数的单调性定义，证明函数 $y = f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 是单调增函数；

(3) 若 $x < y$, 试比较 $f(2^x) - f(2^y)$ 和 $f(x+4y) - f(2x+3y)$ 的大小，并说明理由.

22. 已知函数 $f(x) = m\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} + n$ 的图像经过原点，且无限接近直线 $y = -1$ ，但又不与该直线相交.

(1) 写出函数 $y = f(x)$ 的解析式；

(2) 若函数 $g(x) = f(x) + k(\sqrt{3})^x$, $x \in [-2, 0]$ ，是否存在实数 k ，使得 $y = g(x)$ 的最小值为 0？若存在，求出 k 的值，若不存在，说明理由；

(3) 若对于任意 $x_1, x_2 \in [-1, a+1]$ ，总有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{8}{9}$ ，求实数 a 取值范围.