

# 2022—2023 学年高一下学期第二次学情调研

## 数学

2023.05

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1. 已知  $(1+i)z=i$  ( $i$  虚数单位), 则  $|z| =$

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       C.  $\sqrt{2}$                       D. 2

2. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $BC=5$ ,  $CA=7$ ,  $AB=8$ , 则  $\triangle ABC$  的最大角与最小角之和是 ( )

- A.  $90^\circ$                       B.  $120^\circ$                       C.  $135^\circ$                       D.  $150^\circ$

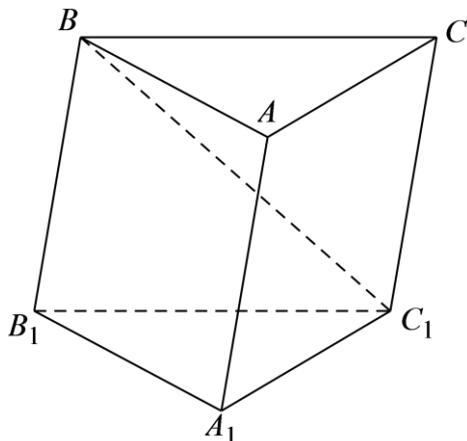
3. 向量  $\vec{a} = (1, 2)$ ,  $\vec{b} = (-1, 0)$ , 则  $\vec{b}$  在  $\vec{a}$  上的投影向量是 ( )

- A.  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$                       B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$                       C.  $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$                       D.  $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$

4. 某公司 10 位员工的月工资 (单位: 元) 为  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , 其均值和方差分别为  $\bar{x}$  和  $s^2$ , 若从下月起每位员工的月工资增加 100 元, 则这 10 位员工下月工资的均值和方差分别为

- A.  $\bar{x}, s^2 + 100^2$                       B.  $\bar{x} + 100, s^2 + 100^2$   
C.  $\bar{x}, s^2$                       D.  $\bar{x} + 100, s^2$

5. 如图, 在斜三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $BC_1 \perp AC$ , 则点  $C_1$  在底面  $ABC$  上的射影  $H$  必在 ( )



- A. 直线  $AC$  上                      B. 直线  $BC$  上

C. 直线  $AB$  上

D.  $\triangle ABC$  内部

6. 若用平行于某圆锥底的平面去截该圆锥, 得到的小圆锥与圆台的母线长相等, 则该小圆锥与该圆台的侧面积的比值为 ( )

A.  $\frac{1}{4}$

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $\frac{1}{2}$

D.  $\frac{3}{4}$

7.  $\triangle ABC$  中,  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $b \sin 2A + \sqrt{3} a \sin B = 0$ ,  $b = \sqrt{3}c$ , 则  $\frac{a}{c}$  的值为 ( )

A. 1

B.  $\sqrt{3}$

C.  $\sqrt{5}$

D.  $\sqrt{7}$

8. 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $P$  在线段  $C_1D_1$  上, 若直线  $B_1P$  与平面  $BC_1D_1$  所成的角为  $\theta$ , 则  $\cos \theta$  的取值范围是 ( )

A.  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

B.  $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

C.  $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$

D.  $\left[\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

9. 给定一组数 5, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 则 ( )

A. 平均数为 3

B. 标准差为  $\frac{8}{5}$

C. 众数为 2

D. 85% 分位数为 5

10. 已知  $m, n$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta$  是两个不重合的平面, 则下列结论正确的是 ( )

A. 若  $m // n$ ,  $n // \alpha$ , 则  $m // \alpha$

B. 若  $m \perp \alpha$ ,  $n \perp \beta$ ,  $\alpha \perp \beta$ , 则  $m \perp n$

C. 若  $\alpha // \beta$ ,  $m \subset \alpha$ ,  $n \subset \beta$  则  $m // n$

D. 若  $m \subset \alpha$ ,  $n \subset \alpha$ , 且  $m$  与  $n$  不平行,  $m // \beta$ ,  $n // \beta$ , 则  $\alpha // \beta$

11. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $c \cos B + b \cos C = a^2$ , 则下列说法正确的是 ( )

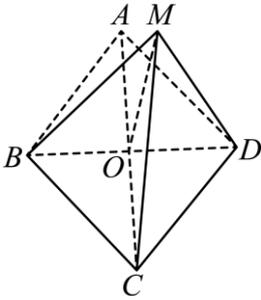
A.  $a = 1$

B. 若  $B+C=2A$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值为  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. 若  $A=\frac{\pi}{4}$ , 且  $\triangle ABC$  只有一解, 则  $b$  的取值范围为  $(0,1]$

D.  $O$  为  $\triangle ABC$  外心, 则  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}$

12. 已知菱形  $ABCD$  中,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $AC$  与  $BD$  相交于点  $O$ , 将  $\triangle ABD$  沿  $BD$  折起, 使顶点  $A$  至点  $M$  处, 在折起的过程中, 下列结论正确的是 ( )



A.  $BD \perp CM$

B.  $DM$  与  $BC$  不可能垂直

C. 存在一个位置, 使  $\triangle VCDM$  为等边三角形

D. 若菱形  $ABCD$  的边长为  $a$ , 则四面体  $MBCD$  体积的最大值为  $\frac{a^3}{8}$

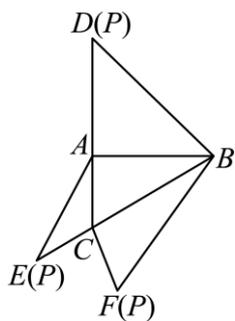
### 三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 为了解某高中学生的身高情况, 现采用分层抽样的方法从三个年级中抽取一个容量为 100 的样本, 其中高一年级抽取 24 人, 高二年级抽取 26 人. 若高三年级共有学生 600 人, 则该校学生总人数为\_\_\_\_\_.

14. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 2$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -1$ , 若  $O$  是  $\triangle ABC$  的重心, 则  $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AC} =$ \_\_\_\_\_.

15. 立德中学数学兴趣小组设计了一个方案来测量学校操场旗杆顶端距离地面高度, 具体步骤如下: ① 设旗杆与地面交于  $O$  点, ② 在  $O$  点的正西方  $A$  点测得旗杆顶端  $P$  的仰角为  $45^\circ$ , ③ 在  $O$  点南偏东  $60^\circ$  的  $B$  点处测得点  $P$  的仰角为  $60^\circ$ , ④ 测得  $A, B$  两点处的距离为  $4\sqrt{21}$  米, 则该旗杆顶端距离地面的高度为\_\_\_\_\_米.

16. 如图, 在三棱锥  $P-ABC$  的平面展开图中,  $AC = 1$ ,  $AB = AD = \sqrt{3}$ ,  $AB \perp AC$ ,  $AB \perp AD$ ,  $\angle CAE = 30^\circ$ , 则①  $\angle FCB$  的余弦值为\_\_\_\_\_; ② 三棱锥  $P-ABC$  外接球的表面积为\_\_\_\_\_.



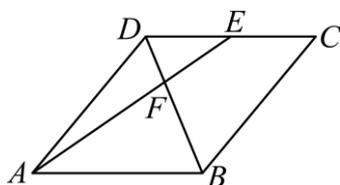
四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 已知复数  $z = m^2 + m - 2 + (m - 1)i$  ( $m \in \mathbf{R}$ ), 其中  $i$  为虚数单位.

(1) 若  $z$  是纯虚数, 求实数  $m$  的值;

(2) 若  $m = 2$ , 设  $\frac{z+i}{z-i} = a + bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ), 试求  $a$  和  $b$  的值.

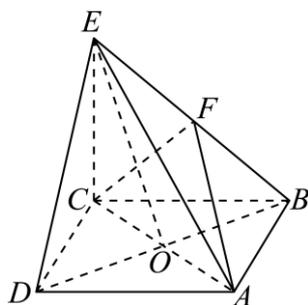
18. 如图, 在菱形  $ABCD$  中,  $E$  是  $CD$  的中点,  $AE$  交  $BD$  于点  $F$ , 设  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ .



(1) 若  $\overrightarrow{EF} = x\vec{a} + y\vec{b}$ , 求  $x, y$  的值;

(2) 若  $|\overrightarrow{AB}| = 1$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ , 求  $\cos \angle AFB$ .

19. 在四棱锥  $E-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是正方形,  $AC$  与  $BD$  交于点  $O$ ,  $EC \perp$  底面  $ABCD$ ,  $F$  为  $BE$  的中点.



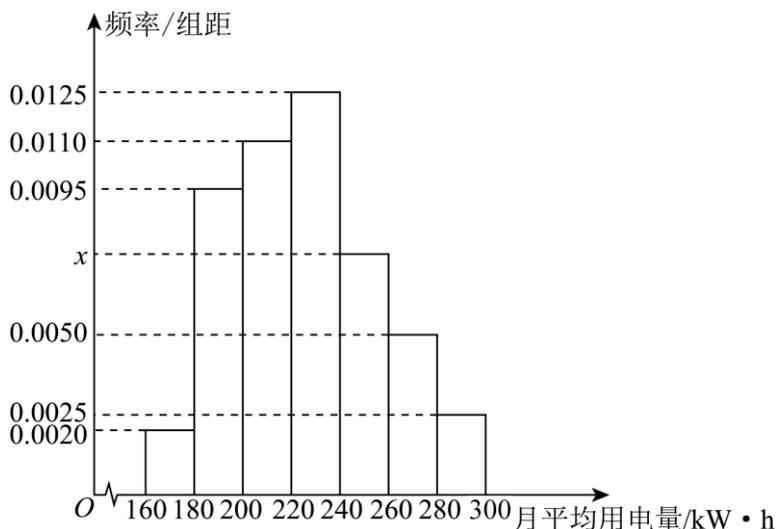
(1) 求证:  $DE \parallel$  平面  $ACF$ ;

(2) 求证:  $BD \perp AE$ ;

(3) 若  $AB = \sqrt{2}CE = 4$ , 求三棱锥  $F-ABC$  的体积.

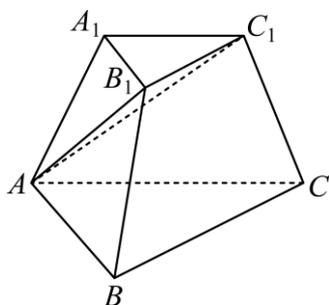
20. 为了了解居民的用电情况, 某市供电局抽查了该市若干户居民的月均用电量 (单位:  $\text{kW} \cdot \text{h}$ ), 并将样本数据分组为  $[160, 180)$ ,  $[180, 200)$ ,  $[200, 220)$ ,  $[220, 240)$ ,  $[240, 260)$ ,  $[260, 280)$ ,

$[280, 300]$ ，其频率分布直方图如图所示.



- (1) 若样本中月均用电量在  $[240, 260)$  内的居民有 30 户，求样本量；
- (2) 在月均用电量为  $[220, 240)$ ， $[240, 260)$ ， $[260, 280)$ ， $[280, 300]$  的四组居民中，用比例分配的分层随机抽样的方法抽取 22 户居民，则月均用电量在  $[240, 260)$  内的居民应抽取多少户？
- (3) 求样本中月均用电量的中位数.

21. 如图，三棱台  $A_1B_1C_1 - ABC$  中， $BC \perp CC_1$ ， $AB = BC = CA = 2B_1C_1$ ， $CC_1 = \sqrt{3}B_1C_1$ .



- (1) 求证： $AB_1 \perp BC$ ；
  - (2) 若二面角  $C_1 - BC - A$  的平面角为  $60^\circ$ ，求直线  $AC_1$  与平面  $BCC_1B_1$  所成角的正切值.
22.  $\triangle ABC$  的内角  $A$ ， $B$ ， $C$  的对边分别为  $a$ ， $b$ ， $c$ . 已知  $(b-c)\sin B = b\sin(A-C)$ .

- (1) 求角  $A$ ；
- (2) 若  $\triangle ABC$  为锐角三角形，且  $\triangle ABC$  的面积为  $S$ ，求  $\frac{2b^2 + 2c^2 + a^2}{S}$  的取值范围.