

南京一中江北校区高三数学

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分.在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 已知集合 $A = \{x | (x-4)(x+e) < 0\}$, $B = \{x | -\pi \leq x \leq \pi\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[-\pi, \pi]$ B. $[-e, e]$ C. $(-e, \pi]$ D. $(-\pi, e]$

2. 已知复数 z 满足 $z(3+4i) = i$, 则 $\bar{z} =$ ()

- A. $4-3i$ B. $-\frac{4}{25}-\frac{3}{25}i$ C. $\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i$ D. $\frac{4}{25}-\frac{3}{25}i$

3. 已知圆锥的母线长为 2, 侧面展开图扇形的面积为 2π , 那么该圆锥的体积是 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. π D. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

4. 对于非零平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, “ $\vec{a} = \lambda \vec{c} (\lambda \in \mathbb{R})$ ”是“ $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 清明节前夕, 某校团委决定举办“缅怀革命先烈, 致敬时代英雄”主题演讲比赛, 经过初赛, 共有 10 人进入决赛, 其中高一年级 3 人, 高二年级 3 人, 高三年级 4 人, 现采用抽签方式决定演讲顺序, 则在高二年级 3 人相邻的前提下, 高一年级 3 人不相邻的概率为 ()

- A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{7}{12}$ C. $\frac{9}{14}$ D. $\frac{5}{14}$

6. 已知二项展开式 $\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$, 则 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 =$ ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. 3 C. $\frac{5}{2}$ D. 5

7. 若 $2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) =$ ()

- A. $5\sqrt{3}+8$ B. $3\sqrt{3}-4$ C. $4+3\sqrt{3}$ D. $5\sqrt{3}-8$

8. 双曲余弦函数 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 是高等数学中重要的函数之一. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x+1)$ 的图象关于点 $(-1, 1)$ 对称, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \cosh x$, 则不等式 $f(x+1) + f(2x-3) > 2$ 的解集为 ()

- A. $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ C. $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ D. $(2, +\infty)$

二、多选题（本大题共 4 小题，共 20.0 分.在每小题有多项符合题目要求）

9. 已知 $e^a > e^b$ ，则下列不等式成立的有（ ）

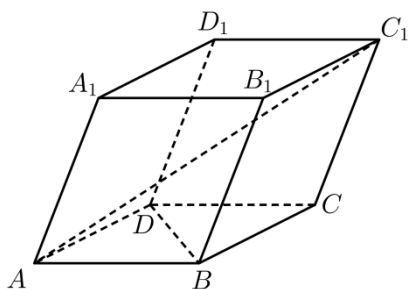
- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $3^{a-b} > 1$ C. $a^{2021} > b^{2021}$ D. $\lg(a-b) < 1$

10. 已知 O 为坐标原点， F_1, F_2 分别是离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 的双曲线 E 的左、右焦点， P 为双曲线上任一点，

PD 平分 $\angle F_1PF_2$ 且 $\overrightarrow{F_1D} \cdot \overrightarrow{PD} = 0$ ， $|OD| = 4$ ，则（ ）

- A. E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$
- B. E 的渐近线方程为 $x \pm 2y = 0$
- C. 点 P 到两条渐近线的距离之积为 $\frac{16}{5}$.
- D. 若直线 PF_1 与双曲线 E 的另一支交于点 M ， N 为 PM 的中点，则 $k_{ON} \cdot k_{MP} = \frac{1}{4}$

11. 如图，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以顶点 A 为端点的三条棱长均为 1，且它们彼此的夹角都是 60° ，则（ ）



- A. $AC_1 = \sqrt{6}$
- B. $AC_1 \perp BD$
- C. 四边形 BDD_1B_1 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D. 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) (n \in \mathbf{N}^*)$. 则下列结论中正确的是（ ）

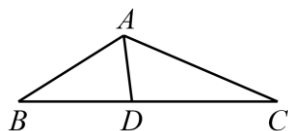
- A. $0 \leq a_n \leq 1$ B. $\{|a_{n+1} - a_n|\}$ 是等比数列

C. $a_8 < a_{10} < a_9$

D. $a_9 < a_{10} < a_8$

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq 4 \\ f(x+1), & x < 4 \end{cases}$, 则 $f(2 + \log_2 3) =$ _____.

14. 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的内角 A 的平分线, $AB = 3$, $AC = 5$, $\angle BAC = 120^\circ$, 则 AD 长为_____.15. 已知底面为正方形的四棱锥 $P-ABCD$ 的五个顶点在同一个球面上, $PD \perp BC$, $AB = 2$, $PC = 1$, $PD = \sqrt{3}$, 则四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的体积为_____.16. 已知对任意的 $x \in (1, +\infty)$, 不等式 $k \cdot (e^{kx} + 1) - \left(\frac{1}{x} + 1\right) \ln x > 0$ 恒成立, 则 k 的取值范围是_____.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $2S_n = (n+1)a_n$, $a_1 = 3$.(1) 求数列 $\{a_n\}$ 通项公式;(2) 设 $b_n = \left(\frac{1}{3}a_n + 1\right)2^{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .18. 已知平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle A + \angle C = 180^\circ$, $BC = 3$.(1) 若 $AB = 6$, $AD = 3$, $CD = 4$, 求 BD ;(2) 若 $\angle ABC = 120^\circ$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$, 求四边形 $ABCD$ 周长的最大值.

19. 某省高考改革新方案中, 语文、数学、外语为必考的 3 个学科, 然后在政治、历史、地理、物理、化学、生物 6 个学科中自主选择 3 个科目参加等级性考试, 称为“3+3”模式. 为了解数学能力对选考物理的影响, 某中学随机调查了该校的 200 名高三学生, 调查结果如下表.

数学能力	优秀	良好	中等	合格	不合格
人数	52	48	50	30	20
选考物理人数	46	34	25	10	5

将数学能力在中等以下（不包括中等）的学生评价为数学能力较弱；否则，评价为数学能力不弱.

(1) 请根据上述表格中的统计数据填写下面的 2×2 列联表, 并通过计算判断是否有 99.9% 的把握认为是

否选考物理与数学能力有关；

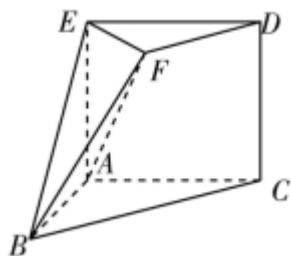
	不选考物理	选考物理	合计
数学能力不弱			
数学能力较弱			
合计			

(2) 以样本估计总体，以频率估计概率，从全省高三学生中随机抽取 3 人，记抽取的 3 人中选考物理的人数为 X ，求 X 的分布列与数学期望.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n=a+b+c+d$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.005	0.001
k	3.841	6.635	7.879	10.828

20. 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ACDE$ 正方形， $DF \parallel BC$ ， $AB \perp AC$ ， $AE \perp$ 平面 ABC ， $AB=AC=2$ ， $EF=DF=\sqrt{2}$.



(1) 求证:平面 $BCDF \perp$ 平面 BEF ;

(2) 求二面角 $A-BF-E$ 的余弦值.

21. 已知圆 $x^2+y^2=17$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 在 x 轴下方的交点为 A ，与抛物线 C 的准线在 x 轴上方的交点为 B ，且点 A, B 关于直线 $y=x$ 对称.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 若点 M, N 是抛物线 C 上与点 A 不重合的两个动点，且 $AM \perp AN$ ，求点 A 到直线 MN 的距离最大时，直线 MN 的方程.

22. 已知函数 $f(x) = \frac{2a}{x} - 1 + \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $g(x) = xf(x) - ax^2 + x$ 有两个极值点, 求实数 a 的取值范围.