

江苏省天一中学 2020-2021 学年第二学期期末考试
高一数学学科（平行班）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 设向量 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 则下列结论中正确的是 ()
- A. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\vec{a} - \vec{b}$ 与 \vec{b} 垂直 D. $\vec{a} \parallel \vec{b}$

【答案】C

2. 已知复数 $z = \frac{5+3i}{1-i}$, 则下列说法正确的是 ()
- A. z 的虚部为 $4i$ B. z 在复平面内对应的点在第二象限
C. $|z| = 5$ D. z 的共轭复数为 $1-4i$

【答案】D

3. 从 4 名男同学和 3 名女同学中任选 3 名同学, 那么互斥而不对立的事件是 ()
- A. 至少有一名男同学与都是男同学
B. 至少有一名男同学与都是女同学
C. 恰有一名男同学与恰有两名男同学
D. 至少有一名男同学与至少有一名女同学

【答案】C

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=80$, $b=100$, $A=45^\circ$, 则此三角形解的情况是 ()
- A. 一解 B. 两解 C. 一解或两解 D. 无解

【答案】B

5. 如图所示的图形中, 每个三角形上各有一个数字, 若六个三角形上的数字之和为 26, 则称该图形是“和谐图形”. 已知其中四个三角形上的数字之和为 20, 现从 1、2、3、4、5 中任取两个数字标在另外两个三角形上, 则恰好使该图形为“和谐图形”的概率为 ()



A. $\frac{3}{10}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{10}$

D. $\frac{3}{20}$

【答案】B

6. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则 ()

A. 若 $m \parallel \alpha, m \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$

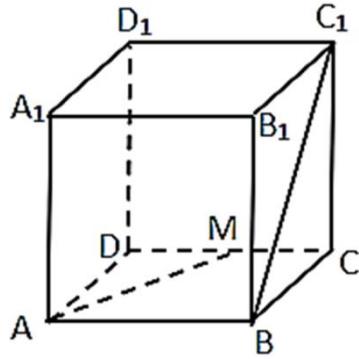
B. 若 $m \parallel \alpha, m \parallel n$, 则 $n \parallel \alpha$

C. 若 $m \perp \alpha, m \parallel \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

D. 若 $m \parallel \alpha, n \subset \alpha$, 则 $m \parallel n$

【答案】C

7. 如图, 点 M 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱 CD 的中点, 则异面直线 AM 与 BC_1 所成角的余弦值是 ()



A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【答案】A

8. 若圆锥的体积与球的体积相等, 且圆锥底面半径与球的直径相等, 则圆锥侧面积与球的表面积之比为

A. $\sqrt{5}:2$

B. $\sqrt{5}:4$

C. $1:2$

D. $\sqrt{3}:4$

【答案】A

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分

9. 给定一组数 5, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 则 ()

A. 平均数为 3

B. 标准差为 $\frac{8}{5}$

C. 众数 2 和 3

D. 85% 分位数为 4.5

【答案】AC

10. 下列说法正确的是 ()

- A. 甲乙两人独立地解题, 已知各人能解出的概率分别是 0.5, 0.25, 则题被解出的概率是 0.125
- B. 若 A , B 是互斥事件, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $P(AB) = 0$
- C. 某校 200 名教师的职称分布情况如下: 高级占比 20%, 中级占比 50%, 初级占比 30%, 现从中抽取 50 名教师做样本, 若采用分层抽样方法, 则高级教师应抽取 10 人
- D. 一位男生和两位女生随机排成一列, 则两位女生相邻的概率是 $\frac{2}{3}$

【答案】BCD

11. 下列结论正确的是 ()
- A. 在 $\square ABC$ 中, 若 $A > B$, 则 $\sin A > \sin B$
- B. 在 $\square ABC$ 中, 若 $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, 则 $\square ABC$ 是锐角三角形
- C. 若 $\sin 2A = \sin 2B$, 则三角形 ABC 为等腰三角形
- D. 在锐角三角形 ABC 中, $\sin A + \sin B > \cos A + \cos B$

【答案】AD

12. 对于给定的 $\square ABC$, 其外心为 O , 重心为 G , 垂心为 H , 则下列结论正确的是 ()
- A. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2$
- B. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$
- C. 过点 G 直线 l 交 AB 、 AC 于 E 、 F , 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 3$
- D. \overrightarrow{AH} 与 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C}$ 共线

【答案】ACD

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 在 $\square ABC$ 中, $AB = 2$, $AC = 3$, $\cos A = \frac{2}{3}$, 则其外接圆的面积为_____.

【答案】 $\frac{9\pi}{4}$

14. 在《九章算术》中, 将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称为“阳马”. 现有一“阳马” $P-ABCD$, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AB = 2$, $AD = 1$, 则该“阳马”的最长棱长等于_____; 外接球表面积等于_____.

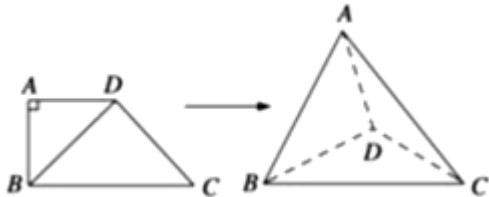
【答案】 ①. 3 ②. 9π

15. 某大学选拔新生补充进“篮球”、“电子竞技”、“国学”三个社团, 据资料统计, 新生通过考核选拔

进入这三个社团成功与否相互独立, 2020年某新生入学, 假设他通过考核选拔进入该校的“篮球”、“电子竞技”、“国学”三个社团的概率依次为 m 、 $\frac{1}{3}$ 、 n , 已知三个社团他都能进入的概率为 $\frac{1}{24}$, 至少进入一个社团的概率为 $\frac{3}{4}$, 且 $m > n$, 则 $m+n$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{3}{4}$

16. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD=AB$, $\angle BCD=45^\circ$, $\angle BAD=90^\circ$, 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 使平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 构成三棱锥 $A-BCD$, 则在三棱锥 $A-BCD$ 中, 下列判断正确的是_____. (写出所有正确的序号)



- ① 平面 $ABD \perp$ 平面 ABC
- ② 直线 BC 与平面 ABD 所成角是 45°
- ③ 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC
- ④ 二面角 $C-AB-D$ 余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】②③④

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(-3,4)$, $\overrightarrow{OB}=(-6,3)$, $\overrightarrow{OC}=(x-5, y+3)$, $\overrightarrow{OD}=(-4, -1)$.

- (I) 若四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 求 x , y 的值;
- (II) 若 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 且 DB 为直角, 求 x , y 的值.

【答案】(I) $-2, -5$; (II) $\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$.

18. 已知复数 ω 在复平面内对应的点位于第二象限, 且满足 $\omega^2 + 2\omega + 4 = 0$.

- (1) 求复数 ω ;
- (2) 设复数 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) 满足: $\omega \cdot z$ 为纯虚数, $|z| = 2$, 求 $x \cdot y$ 的值.

【答案】(1) $\omega = -1 + \sqrt{3}i$; (2) $x \cdot y = -\sqrt{3}$.

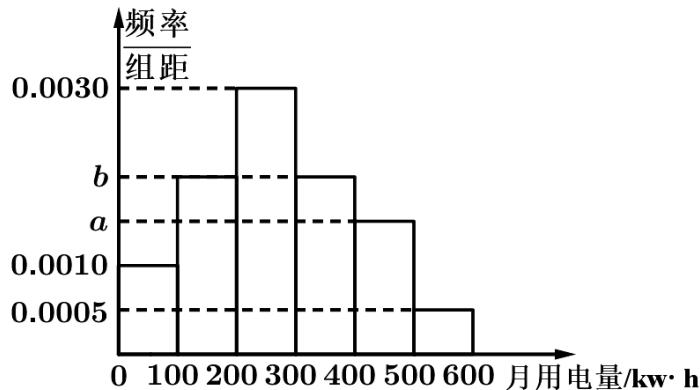
19. 在 $\square ABC$ 中, 角 A , B , C 对应的边分别是 a , b , c , 已知 $\cos 2A - 3\cos(B+C) = 1$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $\square ABC$ 的面积 $S = 5\sqrt{3}$, $b = 5$, 求 $\sin B \sin C$ 的值.

【答案】(1) $A = \frac{\pi}{3}$; (2) $\frac{5}{7}$.

20. 某市为了鼓励市民节约用电, 实行“阶梯式”电价, 将该市每户居民的月用电量划分为三档, 月用电量不超过 $200\text{kW}\cdot\text{h}$ 的部分按 0.5 元/ $\text{kW}\cdot\text{h}$ 收费, 超过 $200\text{kW}\cdot\text{h}$ 但不超过 $400\text{kW}\cdot\text{h}$ 的部分按 0.8 元/ $\text{kW}\cdot\text{h}$ 收费, 超过 $400\text{kW}\cdot\text{h}$ 的部分按 1.0 元/ $\text{kW}\cdot\text{h}$ 收费.



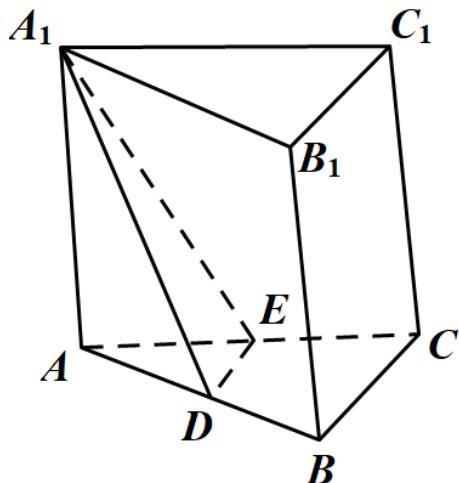
(1) 求某户居民用电费用 y (单位: 元) 关于月用电量 x (单位: $\text{kW}\cdot\text{h}$) 的函数解析式

(2) 为了了解居民的用电情况, 通过抽样获得了今年 1 月份 100 户居民每户的月用电量, 统计分析后得到如图所示的频率直方图. 若这 100 户居民中, 今年 1 月份电费不超过 260 元的占 80%, 求 a , b 的值;

(3) 在 (2) 条件下, 计算月用电量的 75% 分位数.

【答案】(1) $y = \begin{cases} 0.5x, & 0 \leq x \leq 200, \\ 0.8x - 60, & 200 < x \leq 400, \\ x - 140, & x > 400. \end{cases}$ (2) $a = 0.0015$, $b = 0.0020$; (3) 375 千瓦时.

21. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D , E 分别为 AB , AC 的中点.

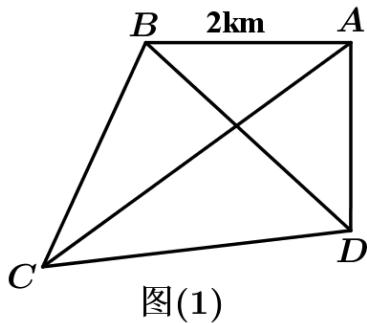


(1) 证明: $B_1C_1 // \text{平面 } A_1DE$;

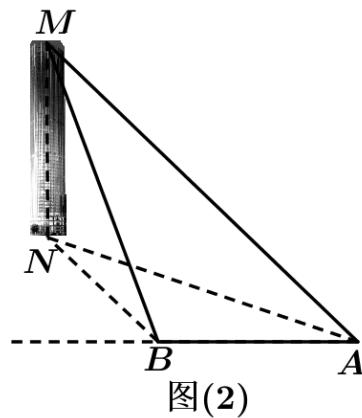
(2) 若平面 $A_1DE \perp \text{平面 } ABB_1A_1$, 证明: $AB \perp DE$.

【答案】(1) 见解析; (2) 见解析.

22. 夜晚, 在侨中 D 栋 5 楼观赏完美大厦的霓虹灯是一件很惬意的事.完美大厦主楼目前是我市中心城区最高的地标性建筑.某学习小组要完成两个实习作业: 验证百度地图测距的正确性及测算完美大厦主楼的高度, 如图 (1), 博爱路沿线的水平路面上有两点 A, B, 其中 AB 指向正西方向.首先利用百度地图测距功能测出 AB 长度为 2km, 接着在南外环沿线选定水平路面上可直接测距的 C, D 两点, 测得 $\angle BCA = 30^\circ$, $\angle ACD = 45^\circ$, $\angle BDC = 60^\circ$, $\angle ADB = 30^\circ$, 学习小组根据上述条件计算出 CD 长度, 并将其与 CD 的实际长度 284km 进行比较, 若误差介于 -20 米~20 米之间, 则认为百度地图测距是准确的.



图(1)



图(2)

(1) 通过计算说明百度地图测距是否准确? ($\sqrt{2} \approx 1.414$)

(2) 如图 (2), 小组在 A 处测得完美大厦主楼楼顶 M 在西偏北 θ 方向上, 在 B 处测得楼顶 M 在西偏北 φ

方向上, 且仰角 $\angle MBN = 45^\circ$; 通过计算得 $\frac{\sin \theta}{\sin \varphi} = \frac{3}{4}$, $\frac{\cos \theta}{\cos \varphi} = \frac{11}{4}$, $\tan 45^\circ \approx 0.0793$, 若百度地图测

出的 $AB = 2\text{km}$ 是准确的, 请根据以上数据测算完美大厦主楼的高度 (精确到 1 米).

【答案】(1) 百度地图测距是准确的; (2) 238m.