

高二 数学 (文科)

一、填空题：(共 14 小题，每小题 4 分，共 56 分)

- 命题“对任意的 $x \in R, x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ ”的否定是_____
- 已知质点运动方程为 $S = t^3 - t + 2$ (S 的单位是 m , t 的单位是 s)，则该质点在 $t = 2s$ 时刻的瞬时速度为_____ (m/s)
- 若圆 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ 的圆心到直线 $x - y + a = 0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 a 的值为

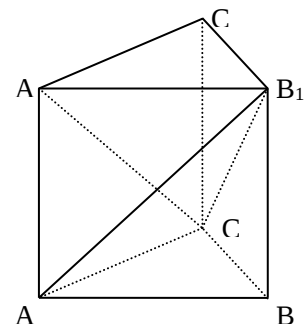
- 椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦距为 2, 则 $m =$ _____
- 已知圆 C 与直线 $x - y = 0$ 及 $x - y - 4 = 0$ 都相切, 圆心在直线 $x + y = 0$ 上, 则圆 C 的方程为_____
- 曲线 $y = e^x$ 在 $x = 0$ 处的切线方程是_____
- 直线 l 与圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 相交于两点 A, B , 弦 AB 的中点为 $(0, 1)$, 则直线 l 的方程为_____
- 已知 m, n 是两条不同的直线, α, β, γ 是三个不同的平面, 现给出下列四个命题, 其中正确命题的序号为_____
① 若 $m \perp \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \perp n$; ② 若 $\alpha \parallel \beta, \beta \parallel \gamma, m \perp \alpha$, 则 $m \perp \gamma$;
③ 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$; ④ 若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 $\alpha \parallel \beta$.
- 一个正三棱锥的侧棱长为 1, 底边长为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为_____
- 双曲线 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的渐近线与圆 $(x - 3)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相切, 则 $r =$ _____
- 若函数 $f(x) = x^3 - x^2 + mx$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递增, 可得实数 m 的取值范围是 $[a, +\infty)$, 则实数 $a =$ _____
- 已知正 $\triangle ABC$, 以 C 点为一个焦点作一个椭圆, 使这个椭圆的另一个焦点在边 AB 上, 且椭圆过 A, B 两点, 则这个椭圆的离心率为_____
- 已知椭圆的中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上, 以其两个焦点和短轴的两个端点为顶点的四边形是一个面积为 2 的正方形, 设 P 为该椭圆上的动点, C, D 的坐标分别是 $(-1, 0), (1, 0)$, 则 $PC \cdot PD$ 的最大值为_____
- 如果圆 $(x - a)^2 + (y - a)^2 = 4 (a > 0)$ 上总存在两个点到原点的距离为 1, 则正实数 a 的取值范围是_____

二、解答题：(共 6 题，共 64 分)

- (本题共 8 分) 已知集合 $A = \{y \mid y = x^2 - \frac{3}{2}x + 1, x \in [\frac{3}{4}, 2]\}$, $B = \{x \mid |x + m^2| \geq 1\}$, 命题 $p: x \in A$, 命题 $q: x \in B$, 并且命题 p 是命题 q 的充分条件, 求实数 m 的取值范围.

16. (本题共 10 分) 设圆上的点 $A(2,3)$ 关于直线 $x+2y=0$ 的对称点仍在圆上, 且直线 $x-y+1=0$ 被圆截得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 求圆的方程.

17. (本题共 10 分) 如图, 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=BC=BB_1=1$, $AB_1=\sqrt{3}$. (1) 求证: 平面 $AB_1C \perp$ 平面 B_1CB ; (2) 求三棱锥 A_1-AB_1C 的体积.



18. (本题共 12 分) 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 是 R 上的奇函数, 且在 $x = 1$ 时取得极小值 $-\frac{2}{3}$. (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 对任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 证明: $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{4}{3}$.

19. (本题共 12 分) 已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2$ (a 为实常数).

(1) 当 $a = -2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 已知 $a < 0$, 求函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值 $g(a)$.

-
20. (本题共 12 分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(-3, 2)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 圆 O 的圆心为坐标原点, 直径为椭圆的短轴, 圆 M 的方程为 $(x-8)^2 + (y-6)^2 = 4$. 过圆 M 上任一点 P 作圆 O 的切线 PA, PB , 切点为 A, B . (1) 求椭圆的方程;
- (2) 若直线 PA 与圆 M 的另一交点为 Q , 当弦 PQ 最大时, 求直线 PA 的方程;
- (3) 求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的最值.

无锡市第一中学 2010—2011 年第一学期期末试卷

高 二数 学（文科）参考答案及评分标准

一、填空题：（共 14 小题，每小题 4 分，共 56 分）

1. 存在 $x \in R, x^3 - x^2 + 1 > 0$

2. 11

3. 2 或 0

4. 5 或 3

5. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$

6. $x - y + 1 = 0$

7. $x - y + 1 = 0$

8. ①②

9. 3π

10. $\sqrt{3}$

11. 1

12. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

13. 2

14. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

二、解答题：（共 6 题，共 64 分）

15. （本题共 8 分）

$A = \left\{ y \mid \frac{7}{16} \leq y \leq 2 \right\}$,2 分

$B = \{ x \mid x \leq -m^2 - 1 \text{ 或 } x \geq -m^2 + 1 \}$,2 分

由条件可知 $A \subseteq B$,2 分

从而有 $-m^2 + 1 \leq \frac{7}{16}$, $m \leq -\frac{3}{4}$ 或 $m \geq \frac{3}{4}$ 2 分

16. （本题共 10 分）

设所求圆的圆心 C 的坐标为 (a, b) , 半径为 r ,

则有 $a + 2b = 0$, ① $(a-2)^2 + (b-3)^2 = r^2$, ②

$$r^2 = 2 + \left(\frac{a-b+1}{\sqrt{2}} \right)^2, \quad \textcircled{3} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

由①②③消去 a, r 得 $(-2b-2)^2 + (b-3)^2 = 2 + \frac{(-3b+1)^2}{2},$

化简得 $b^2 + 10b + 21 = 0$, $b = -3$ 或 $b = -7$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

则所求圆的方程为

$(x-6)^2 + (y+3)^2 = 52$ 或 $(x-14)^2 + (y+7)^2 = 244 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

17. (本题共 10 分)

解: (1) 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $BB_1 \perp$ 底面 ABC ,
则 $BB_1 \perp AB$, $BB_1 \perp BC$,

又由于 $AC=BC=BB_1=1$, $AB_1=\sqrt{3}$, 则 $AB=\sqrt{2}$,

则由 $AC^2+BC^2=AB^2$ 可知, $AC \perp BC$,

又由 $BB_1 \perp$ 底面 ABC 可知 $BB_1 \perp AC$,

则 $AC \perp$ 平面 B_1CB ,

所以有平面 $AB_1C \perp$ 平面 $B_1CB \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 三棱锥 A_1-AB_1C 的体积 $V_{A_1-AB_1C} = V_{B_1-A_1AC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

18. (本题共 12 分)

(1) 可知 $b=d=0$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

所以 $f'(x) = 3ax^2 + c$

可知 $\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+c=0 \\ a+c=-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ c=-1 \end{cases},$

所以 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 即证 $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \leq \frac{4}{3} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

因为 $f'(x) = x^2 - 1$, 所以 $x \in [-1,1]$ 时 $f'(x) \leq 0$, 从而函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减,

所以, $f(x)_{\max} = f(-1) = \frac{2}{3}$, $f(x)_{\min} = f(1) = -\frac{2}{3}$,

所以 $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \leq \frac{4}{3}$,

从而对任意 $x_1, x_2 \in [-1,1]$, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{4}{3} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

19. (本题共 12 分)

解: (1) 当 $a = -2$ 时, $f(x) = x^2 - 2\ln x$, $x > 0$, 由 $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x} > 0$, 得 $x > 1$,

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1, +\infty)$4 分

(2) $f'(x) = \frac{2x^2 + a}{x}$ ($x > 0$), 由 $f'(x) > 0$ 得, $x^2 > -\frac{a}{2}$

因为 $a < 0$, 所以 $x > \sqrt{-\frac{a}{2}}$, 即函数 $f(x)$ 在 $(\sqrt{-\frac{a}{2}}, +\infty)$ 的单调递增, 函数 $f(x)$

在 $(0, \sqrt{-\frac{a}{2}})$ 的单调递减。

当 $\sqrt{-\frac{a}{2}} \leq 1$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = 1$;2 分

当 $\sqrt{-\frac{a}{2}} \geq e$ 时, $[f(x)]_{\min} = f(e) = a + e^2$;2 分

当 $1 < \sqrt{-\frac{a}{2}} < e$ 时, $[f(x)]_{\min} = f(\sqrt{-\frac{a}{2}}) = \frac{a}{2} \ln(-\frac{a}{2}) - \frac{a}{2}$2 分

所以, $g(a) = \begin{cases} 1, & a \geq -2, \\ \frac{a}{2} \ln(-\frac{a}{2}) - \frac{a}{2}, & -2e^2 < a < -2, \\ a + e^2, & a \leq -2e^2, \end{cases}$ 2 分

20. (本题共 12 分)

(1) 可知 $\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 又 $a^2 = b^2 + c^2$,

解得 $a^2 = 15$, $b^2 = 10$, 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$ 4 分

(2) 可知, 此时直线 PA 应经过圆心 $M(8, 6)$, 且直线 PA 的斜率存在, 设直线 PA 的方程

为: $y - 6 = k(x - 8)$,1 分

因为直线 PA 与圆 $O: x^2 + y^2 = 10$ 相切, 所以 $\frac{|6 - 8k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{10}$,

解得 $k = \frac{1}{3}$ 或 $k = \frac{13}{9}$,2 分

所以, 直线 PA 的方程为 $x - 3y + 10 = 0$ 或 $13x - 9y - 50 = 0$ 1 分

(3) 设 $\angle AOB = 2\theta$,

则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 10 \cos 2\theta = 10(2 \cos^2 \theta - 1) = 10\left(\frac{20}{PO^2} - 1\right)$,2 分

因为 $OM = 10$, 所以 $10 - 2 \leq PO \leq 10 + 2$,

所以, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的最大值为 $-\frac{55}{8}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的最小值为 $-\frac{155}{18}$ 2 分