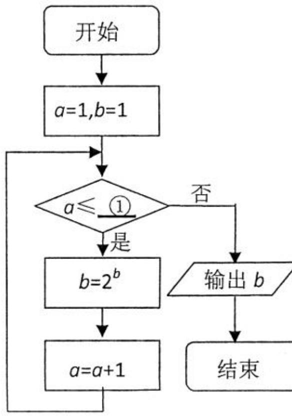
江苏省南菁高级中学2013届高三第二学期开学质量检测

数学试卷

一、填空题：(本大题共14小题，每小题5分，计70分，请将答案填入答题区)



第5题图

1.若集合 $A=\{y\,|\,y=x\},B=\{x\,|\,y=\sqrt{1-x}\}$,则$A\cap B$=___▲___.

2.命题“$\forall x\in R$，有 $x^2+1\geqslant x$”的否定是___▲___.

3.若 i 是虚数单位，则$\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2+3\mathrm{i}^3+\cdots+2013\mathrm{i}^{2013}$=___▲___.

4.“$\dfrac{1}{x}$＜1”是“$\lg x>0$成立”的___▲___．条件（填充分不必要、必要不充分，既不充分也不必要，充要）.

5.已知流程图如图所示，为使输出的b值为16，则判断框内①处应填___▲___.

6.已知直线$ax-by-2=0$与曲线$y=x^3$在$P(1,1)$处的切线互相垂直，则$\dfrac{a}{b}=$___▲___.

7.已知 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{13}{14}$，且 $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，则 β=___▲___.

8.若4张卡片上分别写有数字1，2，3，4，从这4张卡片中随机抽取2张，则取出的2张卡片上的数字之和为奇数的概率为___▲___.

9.若A、B与 F_1、F_2分别为椭圆C：$\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$的两长轴端点与两焦点，椭圆C上的点P使得$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\tan\angle APB$=___▲___.

10.已知数列$\{a_n\}(n\in N^*)$满足 $a_1=1$ 且$a_n=a_{n-1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$，则其前2013项的和为___▲___.

11.定义在**R**上的函数$y=f(x)$是增函数，且函数$y=f(x-2)$的图像关于$(2,0)$成中心对称，若s,t满足不等式$f(s^2-4s)\geq -f(4t-t^2)$，若$-2\leq s\leq 2$时，则$3t+s$的最大值为___▲___.

12.已知圆 M：$(x-1)^2+(y-3)^2=4$，过x轴上的点$P(a,0)$存在一直线与圆M相交，交点为A、B，且满足$PA=BA$，则点P的横坐标a的取值范围为___▲___.

13.已知非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$满足$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=0$，则$\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$的最小值为___▲___.

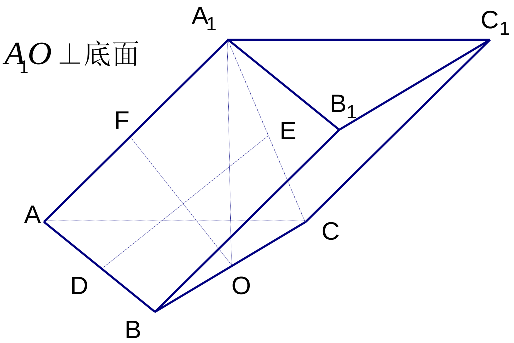
14.已知，点 $P(x,y)$ 的坐标满足 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y<0\\ x-\sqrt{3}y+2<0\\ y\geq 0\end{cases}$，则 $\dfrac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的取值范围为__▲__.

二、解答题(本大题共 6 小题，共 90 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。)

15.（本题满分 14 分）在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，且 A，B，C 成等差数列．

（1）若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{3}{2}$，$b=\sqrt{3}$，求 $a+c$ 的值；　　（2）求 $2\sin A-\sin C$ 的取值范围．

16.在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知底面 ABC 是边长为 a 的正三角形，侧棱 $AA_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$，点 D,E,F,O 分别为边 AB,A_1C,AA_1,BC 的中点，$A_1O\perp$底面 ABC.



（Ⅰ）求证：线段 $DE\,//$ 平面 BB_1C_1C；

（Ⅱ）求证：$FO\perp$平面 BB_1C_1C.

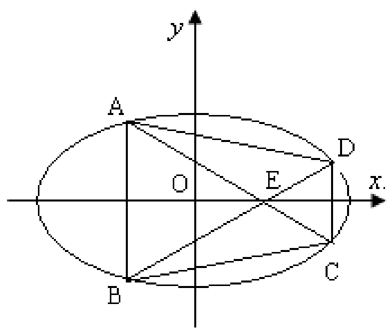
17.某生产旅游纪念品的工厂，拟在 2010 年度将进行系列促销活动．经市场调查和测算，该纪念品的年销售量 x 万件与年促销费用 t 万元之间满足 $3-x$ 与 $t+1$ 成反比例．若不搞促销活动，纪念品的年销售量只有 1 万件．已知工厂 2010 年生产纪念品的固定投资为 3 万元，每生产 1 万件纪念品另外需要投资 32 万元．当工厂把每件纪念品的售价定为："年平均每件生产成本的 150%"与"年平均每件所占促销费一半"之和时，则当年的产量和销量相等．(利润=收入－生产成本－促销费用)

（1）求出 x 与 t 所满足的关系式；

（2）请把该工厂 2010 年的年利润 y 万元表示成促销费 t 万元的函数；

（3）试问：当 2010 年的促销费投入多少万元时，该工厂的年利润最大？

18.如图，椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $M(1,\dfrac{4\sqrt{2}}{3}),N(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},1)$，梯形 $ABCD$（$AB\,//\,CD\,//\,y$ 轴，且 $AB>CD$）内接于椭圆，E 是对角线 AC 与 BD 的交点．



（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 $AB=m,CD=n,OE=d$ 试求 $\dfrac{m-n}{d}$ 的最大值．

19.（本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{ax}{x+b}$，且 $f(1)=1$，$f(-2)=4$.

（1）求 a 、b 的值；
（2）已知定点 $A(1,0)$，设点 $P(x,y)$ 是函数 $y=f(x)(x<-1)$ 图象上的任意一点，求 $|AP|$ 的最小值，并求此时点 P 的坐标；
（3）当 $x\in[1,2]$ 时，不等式 $f(x)\le\dfrac{2m}{(x+1)|x-m|}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

20.（本小题满分 16 分）

设数列 $\{a_n\}$，对任意 $n\in N^*$ 都有 $(kn+b)(a_1+a_n)+p=2(a_1+a_2\cdots+a_n)$，(其中 k 、b 、p 是常数)。
（1）当 $k=0$，$b=3$，$p=-4$ 时，求 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$；
（2）当 $k=1$，$b=0$，$p=0$ 时，若 $a_3=3$，$a_9=15$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
（3）若数列 $\{a_n\}$ 中任意（不同）两项之和仍是该数列中的一项，则称该数列是“封闭数列”. 当 $k=1$，$b=0$，$p=0$ 时，设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_2-a_1=2$，试问：是否存在这样的“封闭数列” $\{a_n\}$，使得对任意 $n\in N^*$，都有 $S_n\neq 0$，且 $\dfrac{1}{12}<\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}<\dfrac{11}{18}$. 若存在，求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 的所有取值；若不存在，说明理由.

江苏省南菁高级中学 2013 届高三第二学期开学质量检测

高三数学试卷 II (加试部分)

21. 学校餐厅每天供应 1000 名学生用餐，每星期一有 A、B 两样菜可供选择，调查资料表明，凡是在本周星期一选 A 菜的，下周星期一会有 20％改选 B，而选 B 菜的，下周星期一则有 30％改选 A，若用 A_n、B_n 分别表示在第 n 个星期一选 A、B 菜的人数.

(1)若 $\begin{bmatrix}A_{n+1}\\B_{n+1}\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}A_n\\B_n\end{bmatrix}$，请你写出二阶矩阵 M；（**2**）求二阶矩阵 M 的逆矩阵.

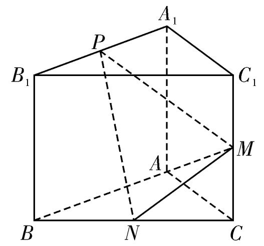
22.（本题满分 10 分）
若极坐标系的极轴与直角坐标系的 x 轴非负半轴重合，单位长度相等，已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sin\alpha\\y=\cos^2\alpha\end{cases},\alpha\in[0,2\pi)$，曲线 D 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$.
（1）将曲线 C 的参数方程化为普通方程；
（2）曲线 C 与曲线 D 有无公共点？试说明理由.

23．（本题满分 10 分）

如图，已知三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直，$AA_1＝AB＝AC＝1$，$AB\perp AC$，M、N 分别是 CC_1、BC 的中点，点 P 在直线 A_1B_1 上，且满足 $\overrightarrow{A_1P}=\lambda\overrightarrow{A_1B_1}\left(\lambda\in R\right)$．

（1）证明：$PN\perp AM$；

（2）若平面 PMN 与平面 ABC 所成的角为 45°，试确定点 P 的位置．



24．（本题满分 10 分）

设数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1=a, a_{n+1}=a_n{}^2+a_1$， $M=\left\{a\in\mathbf{R}\middle|n\in\mathbf{N}^*，|a_n|\leqslant 2\right\}$．

（1）当 $a\in(-\infty,-2)$ 时，求证： $a\notin M$;

（2）当 $a\in(0,\dfrac{1}{4}]$ 时，求证： $a\in M$ ；

（3）当 $a\in(\dfrac{1}{4},+\infty)$ 时，判断元素 a 与集合 M 的关系，并证明你的结论．

一填空题：

1. $(-\infty,1]$　2. $\exists x\in R$，使 $x^2+1<x$；　3. $1006+1007i$　4. 必要不充分条件　5. 3

6. $-\dfrac{1}{3}$　7. $\dfrac{\pi}{3}$

8. $\dfrac{2}{3}$　9. $-\sqrt{5}$　10. 16　11. **0**　12. $1-3\sqrt{3}\le a\le 1+3\sqrt{3}$　13. 1　14. $[-\sqrt{3},\sqrt{3})$

二解答题：

15.解：1）因为 A，B，C 成等差数列，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

$\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{3}{2}$，$\therefore ac\cos(\pi-B)=-\dfrac{3}{2}$，$\therefore \dfrac{1}{2}ac=\dfrac{3}{2}$，即 $ac=3$.

$\because b=\sqrt{3}$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$\therefore a^2+c^2-ac=3$，即$(a+c)^2-3ac=3$.

$\therefore (a+c)^2=12$，所以 $a+c=2\sqrt{3}$.　…………………7 分

（2）$2\sin A-\sin C=2\sin(\dfrac{2\pi}{3}-C)-\sin C=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\dfrac{1}{2}\sin C)-\sin C=\sqrt{3}\cos C$.

$\because 0<C<\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore \sqrt{3}\cos C\in(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}，\sqrt{3})$.

$\therefore 2\sin A-\sin C$ 的取值范围是$(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}，\sqrt{3})$.　……………………………14 分

16.（Ⅰ）因为平面 ACC_1A_1 为平行四边行，E为AC_1的中点，所以 A,E,C_1 共线，　……2 分

$\left.\begin{array}{r}D为AB的中点\\E为AC_1的中点\end{array}\right\}\Rightarrow DE\parallel BC_1$，　……………………………………4 分

$\left.\begin{array}{r}DE\parallel BC_1\\ 又\ BC_1\subseteq 平面BCC_1B_1\\ DE\not\subset 平面BCC_1B_1\end{array}\right\}\Rightarrow DE\parallel 平面BCC_1B_1$.　…………………………6 分

（Ⅱ）因为ΔABC是边长这 a 的正三角形，所以 $AO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

又 $A_1O\perp$底面 ABC，所以 $A_1O\perp AO$，　…………………………………………8 分

又 $AA_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$，所以 $A_1O=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

又 F 为 AA_1 的中点，所以 $\left.\begin{array}{r}OF\perp AA_1\\BB_1\parallel AA_1\end{array}\right\}\Rightarrow OF\perp BB_1$.　………………………………10 分

又 $\left.\begin{array}{r}BC\perp AO\\BC\perp A_1O\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp 平面\ AOA_1\Rightarrow BC\perp OF$，　………………………………12 分

所以 $OF\perp$平面 BB_1C_1C.　…………………………………………14 分

17.解：（1）设比例系数为$k(k\neq 0)$．由题知，有$3-x=\dfrac{k}{t+1}$．

又$t=0$时，$x=1$，所以 $3-1=\dfrac{k}{0+1}$，$k=2$．

所以x与t的关系是$x=3-\dfrac{2}{t+1}(t\geq 0)$．…………4 分

（2）依据题意，可知工厂生产x万件纪念品的生产成本为$(3+32x)$万元，促销费用为t万元，则每件纪念品的定价为：$\left(\dfrac{3+32x}{x}\cdot 150\%+\dfrac{t}{2x}\right)$元/件．于是，$y=x\cdot\left(\dfrac{3+32x}{x}\cdot 150\%+\dfrac{t}{2x}\right)-(3+32x)-t$，进一步化简，得$y=\dfrac{99}{2}-\dfrac{32}{t+1}-\dfrac{t}{2}(t\geq 0)$．

因此，工厂 2010 年的年利润$y=\dfrac{99}{2}-\dfrac{32}{t+1}-\dfrac{t}{2}(t\geq 0)$万元．…8 分

（3）由（2）知，$y=\dfrac{99}{2}-\dfrac{32}{t+1}-\dfrac{t}{2}(t\geq 0)$

$$=50-\left(\frac{32}{t+1}+\frac{t+1}{2}\right)\leq 50-2\sqrt{\frac{32}{t+1}\cdot\frac{t+1}{2}}=42,$$

当且仅当$\dfrac{t+1}{2}=\dfrac{32}{t+1}$，即$t=7$时，取等号，

所以，当 2010 年的促销费用投入 7 万元时，工厂的年利润最大，最大利润为 42 万元．…………14 分

18.（Ⅰ）由题意得$\begin{cases}\dfrac{27}{4a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{32}{9b^2}=1,\end{cases}$ ……………………………………3 分

解得$a^2=9,b^2=4$． ……………………………………6 分

（Ⅱ）根据对称性可知点E在x轴上，则E点的坐标为$(d,0)$， ……………………7 分

设BD的方程为$x=ky+d$，由$\begin{cases}x=ky+d,\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$得$(9+4k^2)y^2+8dky+4d^2-36=0$ …9 分

设$B(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=-\dfrac{8dk}{9+4k^2}$，

$m-n=-2y_1-2y_2=\dfrac{16dk}{9+4k^2}$， ……………………………………………11 分

从而$\dfrac{m-n}{d}=\dfrac{16k}{9+4k^2}\leq\dfrac{16k}{12k^2}=\dfrac{4}{3}$， ……………………………13 分

等号当且仅当$k=\dfrac{3}{2}$取得. ……………………………………14 分

19. 解：（1）由$\begin{cases} f(\ 1=) \\ f(-\ \ 2=) \end{cases}$，得$\begin{cases} a=b+1 \\ -2a=b-2 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$. …………………………………3 分

（2）由（1）$f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$，所以$|AP|^2=(x-1)^2+y^2=(x-1)^2+4(\dfrac{x}{x+1})^2$，

令$x+1=t$，$t<0$，则$|AP|^2=(t-2)^2+4(1-\dfrac{1}{t})^2=t^2+\dfrac{4}{t^2}-4(t+\dfrac{2}{t})+8$

$=(t+\dfrac{2}{t})^2-4(t+\dfrac{2}{t})+4=(t+\dfrac{2}{t}-2)^2$ ………………………………6 分

因为$x<-1$，所以$t<0$，所以，当$t+\dfrac{2}{t}\le -2\sqrt{2}$，

所以$|AP|^2\ge(-2\sqrt{2}-2)^2$，即$AP$的最小值是$2\sqrt{2}+2$，此时$t=-\sqrt{2}$，$x=-\sqrt{2}-1$

点P的坐标是$(-\sqrt{2}-1,2+\sqrt{2})$。……………………………………9 分

（3）问题即为$\dfrac{2x}{x+1}\le\dfrac{2m}{(x+1)|x-m|}$对$x\in[1,2]$恒成立，也就是$x\le\dfrac{m}{|x-m|}$对$x\in[1,2]$恒成立，………10 分

要使问题有意义，$0<m<1$或$m>2$.

法一：在$0<m<1$或$m>2$下，问题化为$|x-m|\le\dfrac{m}{x}$对$x\in[1,2]$恒成立，

即$m-\dfrac{m}{x}\le x\le\dfrac{m}{x}+m$对$x\in[1,2]$恒成立，即$mx-m\le x^2\le mx+m$对$x\in[1,2]$恒成立，

①当$x=1$时，$\dfrac{1}{2}\le m<1$或$m>2$，

②当$x\ne1$时，$m\ge\dfrac{x^2}{x+1}$且$m\le\dfrac{x^2}{x-1}$对$x\in(1,2]$恒成立，

对于$m\ge\dfrac{x^2}{x+1}$对$x\in(1,2]$恒成立，等价于$m\ge(\dfrac{x^2}{x+1})_{\max}$，

令$t=x+1$，$x\in(1,2]$，则$x=t-1$，$t\in(2,3]$，

$\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{(t-1)^2}{t}=t+\dfrac{1}{t}-2$，$t\in(2,3]$递增，

$\therefore(\dfrac{x^2}{x+1})_{\max}=\dfrac{4}{3}$，$m\ge\dfrac{4}{3}$，结合$0<m<1$或$m>2$，$\therefore m>2$

对于$m\le\dfrac{x^2}{x-1}$对$x\in(1,2]$恒成立，等价于$m\le(\dfrac{x^2}{x-1})_{\min}$

令$t=x-1$，$x\in(1,2]$，则$x=t+1$，$t\in(0,1]$，

$\frac{x^2}{x-1}=\frac{(t+1)^2}{t}=t+\frac{1}{t}+2$，$t\in(0,1]$递减，

$\therefore(\frac{x^2}{x-1})_{\min}=4$，$\therefore m\le 4$，$\therefore 0<m<1$或$2<m\le 4$，

综上：$2<m\le 4$ ……………………………………16 分

法二：

故问题转化为$x|x-m|\le m$对$x\in[1,2]$恒成立，

令$g(x)=x|x-m|$

①若$0<m<1$时，由于$x\in[1,2]$，故$g(x)=x(x-m)=x^2-mx$，

$g(x)$在$x\in[1,2]$时单调递增，依题意$g(2)\le m$，$m\ge\frac{4}{3}$，舍去；

②若$m>2$，由于$x\in[1,2]$，故$g(x)=x(m-x)=-(x-\frac{m}{2})^2+\frac{m^2}{4}$，

考虑到$\frac{m}{2}>1$，再分两种情形：

（ⅰ）$1<\frac{m}{2}\le 2$，即$2<m\le 4$，$g(x)$的最大值是$g(\frac{m}{2})=\frac{m^2}{4}$，

依题意$\frac{m^2}{4}\le m$，即$m\le 4$，$\therefore 2<m\le 4$；

（ⅱ）$\frac{m}{2}>2$，即$m>4$，$g(x)$在$x\in[1,2]$时单调递增，

故 $g(2)\le m$，$\therefore 2(m-2)\le m$，$\therefore m\le 4$，舍去。综上可得，$2<m\le 4$ ……………………………16 分

20.解：（1）当$k=0$，$b=3$，$p=-4$时，

$3(a_1+a_n)-4=2(a_1+a_2\cdots+a_n)$，　①

用$n+1$去代n得，$3(a_1+a_{n+1})-4=2(a_1+a_2\cdots+a_n+a_{n+1})$，　②

②-①得，$3(a_{n+1}-a_n)=2a_{n+1}$，$a_{n+1}=3a_n$，……………………………………2 分

在①中令$n=1$得，$a_1=1$，则$a_n\ne 0$，$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$，

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是以首项为 1，公比为 3 的等比数列，

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{3^n-1}{2}$。……………………………………4 分

（2）当$k=1$，$b=0$，$p=0$时，$n(a_1+a_n)=2(a_1+a_2\cdots+a_n)$，　③

用$n+1$去代n得，$(n+1)(a_1+a_{n+1})=2(a_1+a_2\cdots+a_n+a_{n+1})$，　④

④-③得，　$(n-1)a_{n+1}-na_n+a_1=0$，　⑤……………………………………6 分

用 $n+1$ 去代 n 得，$na_{n+2}-(n+1)a_{n+1}+a_1=0$，　⑥

⑥－⑤得，$na_{n+2}-2na_{n+1}+na_n=0$，即 $a_{n+2}-\quad=a_{n+1}-\quad$，……………………………………8 分

∴数列 $\{a_n\}$ 是等差数列。

∵ $a_3=3$，$a_9=15$，∴公差 $d=\frac{a_9-a_3}{9-3}=2$，∴ $a_n=2n-3$。……………………………………10 分

（3）由（2）知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，∵ $a_2-a_1=2$，∴ $a_n=a_1+2(n-1)$。

又 $\{a_n\}$ 是“封闭数列”，得：对任意 $m,n\in N^*$，必存在 $p\in N^*$ 使

$a_1+2(n-1)+a_1+2(m-1)=a_1+2(p-1)$，

得 $a_1=2(p-m-n+1)$，故 a_1 是偶数，……………………………………12 分

又由已知，$\frac{1}{12}<\frac{1}{S_1}<\frac{11}{18}$，故 $\frac{18}{11}<a_1<12$。

一方面，当 $\frac{18}{11}<a_1<12$ 时，$S_n=n(n+a_1-1)>0$，对任意 $n\in N^*$，都有 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}\geq\frac{1}{S_1}>\frac{1}{12}$。

另一方面，当 $a_1=2$ 时，$S_n=n(n+1)$，$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

则 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=1-\frac{1}{n+1}$，

取 $n=2$，则 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}>\frac{11}{18}$，不合题意。……………………………………14 分

当 $a_1=4$ 时，$S_n=n(n+3)$，$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{3}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3})$，则

$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{11}{18}-\frac{1}{3}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3})<\frac{11}{18}$，

当 $a_1\geq 6$ 时，$S_n=n(n+a_1-1)>n(n+3)$，$\frac{1}{S_n}<\frac{1}{3}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3})$，

$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}<\frac{11}{18}-\frac{1}{3}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3})<\frac{11}{18}$，

又 $\frac{18}{11}<a_1<12$，∴ $a_1=4$ 或 $a_1=6$ 或 $a_1=8$ 或 $a_1=10$。……………………………………16 分

附加题：

21. 解：（1）$M=\begin{bmatrix}\frac{4}{5},\frac{3}{10}\\ \frac{1}{5},\frac{7}{10}\end{bmatrix}$；……………………………………………………4 分

（2）设矩阵 M 的逆矩阵为$\begin{bmatrix}x,y\\ w,v\end{bmatrix}$，则由$\begin{bmatrix}\frac{4}{5},\frac{3}{10}\\ \frac{1}{5},\frac{7}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x,y\\ w,v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,0\\ 0,1\end{bmatrix}$得：$\begin{cases}\frac{4}{5}x+\frac{3}{10}w=1\\ \frac{1}{5}x+\frac{7}{10}w=0\end{cases}$，

$\begin{cases}\frac{4}{5}y+\frac{3}{10}v=0\\ \frac{1}{5}y+\frac{7}{10}v=1\end{cases}$，解之得：$\begin{cases}x=\frac{7}{5}\\ w=-\frac{2}{5}\end{cases}$，$\begin{cases}y=-\frac{3}{5}\\ v=\frac{8}{5}\end{cases}$.……………………………………………10 分

22. 解：（1）由$\begin{cases}x=\sin\alpha\\ y=\cos^2\alpha\end{cases},\alpha\in[0,2\pi)$ 得 $x^2+y=1,x\in[-1,1]$ ……4 分

（2）由$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$得曲线$D$的普通方程为$x+y+2=0$……6 分

$\begin{cases}x+y+2=0\\ x^2+y=1\end{cases}$ 得 $x^2-x-3=0$ ……8 分

解得$x=\frac{1\pm\sqrt{14}}{2}\notin[-1,1]$, 故曲线$C$与曲线$D$无公共点 ……10 分

23. 解：（1）证明：如图，以 AB，AC，AA_1 分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

则 $P(\lambda，0,1)$，$N(\frac{1}{2}，\frac{1}{2}，0)$，$M(0,1，\frac{1}{2})$，…………………2 分

从而$\overrightarrow{PN}=(\frac{1}{2}-\lambda，\frac{1}{2}，-1)$，$\overrightarrow{AM}=(0,1，\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{AM}=(\frac{1}{2}-\lambda)\times0+\frac{1}{2}\times1-1\times\frac{1}{2}=0$，

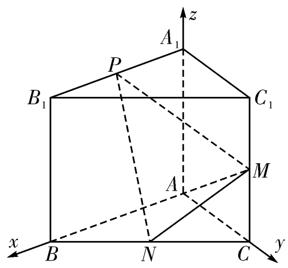
所以 $PN\perp AM$．…………………3 分

（2）平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AA_1}=(0, 0, 1)$.

设平面 PMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x，y，z)$，

由（1）得$\overrightarrow{MP}=(\lambda，-1，\frac{1}{2})$.

由$\begin{cases} m\cdot\overrightarrow{NP}=0, \\ m\cdot\overrightarrow{MP}=0, \end{cases}$得$\begin{cases} (\lambda-\frac{1}{2})x-\frac{1}{2}y+z=0, \\ \lambda x-y+\frac{1}{2}z=0. \end{cases}$ ………………5 分



解得$\begin{cases} y=\dfrac{2\lambda+1}{3}x, \\ z=\dfrac{2(1-\lambda)}{3}x. \end{cases}$ 令$x=3$,得$m=(3,2\lambda+1,2(1-\lambda))$． ……………7 分

∵平面 PMN 与平面 ABC 所成的二面角为 45°，

∴$|\cos\langle \boldsymbol{m}，\boldsymbol{n}\rangle|=|\frac{m\cdot n}{|m|\cdot|n|}|=\frac{|2(1-\lambda)|}{\sqrt{9+(2\lambda+1)^2+4(1-\lambda)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

解得 $\lambda=-\frac{1}{2}$. …………………9 分

故点 P 在 B_1A_1 的延长线上，且$|A_1P|=\frac{1}{2}$. …………………10 分

24. 证明:（1）如果 $a<-2$，则$|a_1|=|a|>2$，$a\notin M$． ………………………………………… 2 分

（2） 当 $0<a\leqslant\frac{1}{4}$时，$|a_n|\leqslant\frac{1}{2}$（$\forall n\geqslant 1$）.

事实上,〔1〕当 $n=1$时，$|a_1|=|a|\leqslant\frac{1}{2}$.

设 $n=k-1$ 时成立（$k\geqslant 2$ 为某整数),

则〔2〕对 $n=k$，$|a_k|\leqslant|a_{k-1}|^2+a\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

由归纳假设，对任意 $n\in\mathbb{N}^*$，$|a_n|\leqslant\frac{1}{2}<2$，所以 $a\in M$. …⋯⋯6 分

（3） 当$a>\frac{1}{4}$时，$a\notin M$． 证明如下:

对于任意$n\geqslant 1$，$a_n>a>\frac{1}{4}$，且$a_{n+1}=a_n^2+a$.

对于任意 $n\geqslant 1$，$a_{n+1}-a_n=a_n^2-a_n+a=(a_n-\frac{1}{2})^2+a-\frac{1}{4}\geqslant a-\frac{1}{4}$，则 $a_{n+1}-a_n\geqslant a-\frac{1}{4}$.

所以，$a_{n+1}-a=a_{n+1}-a_1\geqslant n(a-\frac{1}{4})$.

当$n>\dfrac{2-a}{a-\frac{1}{4}}$时，$a_{n+1}\geqslant n(a-\frac{1}{4})+a>2-a+a=2$，即$a_{n+1}>2$，因此$a\notin M$．………

10 分