

江苏省无锡市梅村高级中学 2020—2021 学年高一上学期 10 月月考

数学试卷

2020. 10

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

1. 若全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A=\{2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 3, 6, 7\}$, 则 $B \cap (\complement_U A)=$

A. $\{1, 6\}$ B. $\{1, 7\}$ C. $\{6, 7\}$ D. $\{1, 6, 7\}$

2. 命题 “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 < 0$ ” 的否定是

A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 \geq 0$ B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 \geq 0$
C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 > 0$ D. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 < 0$

3. 已知 $A=\{x, x+1, 1\}$, $B=\{x, x^2+x, x^2\}$, 且 $A=B$, 则 $x=$

A. $x=1$ 或 $x=-1$ B. $x=1$
C. $x=0$ 或 $x=1$ 或 $x=-1$ D. $x=-1$

4. 已知全集 $U=\mathbb{R}$, 集合 $A=\{x \mid |x-1| < 1\}$, 集合 $B=\left\{x \mid \frac{2x-5}{x-1} \geq 1\right\}$, 则 $A \cap (\complement_U B)=$

A. $\{x \mid 1 \leq x < 2\}$ B. $\{x \mid 1 < x < 2\}$ C. $\{x \mid 1 < x \leq 2\}$ D. $\{x \mid 1 \leq x < 4\}$

5. 设 $a > 1$, 则 $4a + \frac{1}{a-1}$ 的最小值为

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

6. 使得命题 “ $\exists x \in \mathbb{R}$, 使 $x^2 + a < 0$ 成立” 是真命题的一个充分不必要条件是

A. $a < 0$ B. $a \geq 0$ C. $a \leq -1$ D. $a \geq 1$

7. 在 $\mathbb{R}$ 上定义新运算 $*$, $a * b = ab + 2a + b$, 则满足 $x * (x - 2) < 0$ 的实数 x 的取值范围

A. $0 < x < 2$ B. $-2 < x < 1$ C. $x < -2$ 或 $x > 1$ D. $-1 < x < 2$

8. 已知集合 $M=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 非空集合 A, B 均是 M 的子集, 且 $A \cap B = \emptyset$, 符合条件的集合 A, B 组成一组 “互斥子集”, (视 (A, B) 与 (B, A) 为同一组 “互斥子集”), 则满足条件的 “互斥子集” 有多少组

A. 90 B. 180 C. 210 D. 105

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

9. 下列四个命题，假命题的有

A. $\exists x \in \mathbb{N}, 1 < 4x < 3$ B. $\exists x \in \mathbb{Z}, 5x - 1 = 0$
C. $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 - 1 = 0$ D. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 2 > 0$

10. 以下四个推理中，正确的有

A. $a \in (A \cup B) \Rightarrow a \in A$ B. $a \in (A \cap B) \Rightarrow a \in (A \cup B)$
C. $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ D. $A \cup B = A \Rightarrow A \cap B = B$

11. 设 $b > a > 0$, $c \in \mathbb{R}$, 下列不等式中正确的是

A. $\sqrt{b} > \sqrt{a}$ B. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ C. $ac^2 < bc^2$ D. $\frac{1}{a} - c < \frac{1}{b} - c$

12. 下列函数中，最大值为 $\frac{1}{2}$ 的是

A. $y = x^2 + \frac{1}{16x^2}$ B. $y = x\sqrt{1-x^2} (0 \leq x \leq 1)$

C. $y = \frac{x^2}{x^4 + 1}$ D. $y = x + \frac{4}{x+2} (x > -2)$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上）

13. 不等式 $-x^2 + x + 5 < -3x$ 的解集为_____.

14. 若 $p: x < 2$ 是 $q: x < a$ 的充分不必要条件，则 a 的取值范围是_____.

15. 若正数 x, y 满足 $x + 3y = 5xy$ ，则当 $3x + 4y$ 取最小值时， y 的值为_____.

16. 已知 $f(x) = 2x^2 + bx + c$ ，当 $f(x) \leq 0$ 的解集为 $(1, 5)$ ，则 $f(x) =$ _____；若对于 $\forall x \in$

$[1, 4]$ ，不等式 $f(x) + t \geq 0$ 恒成立，则实数 t 的取值范围_____.

四、解答题（本大题共 6 小题，共计 70 分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. （本小题满分 10 分）

(1) 解不等式 $\frac{x-2}{x-1} \geq 2$ ；

(2) 若 $a > 0$ ，解关于 x 的不等式： $ax^2 - (2a+1)x + 2 \leq 0$.

18. （本小题满分 12 分）

已知集合 $A = \{x | x < -3 \text{ 或 } x > 2\}$ ， $B = \{x | -4 \leq x - 2 < 2\}$.

(1) 求 $A \cap B$ ， $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup (\complement_{\mathbb{R}} B)$ ；

(2) 若集合 $M = \{x | 2k - 1 \leq x \leq 2k + 1\}$ 是集合 A 的真子集，求实数 k 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

已知集合 $A = \{x \mid x^2 + 2x - a = 0\}$.

(1) 若 $\varnothing$ 是 A 的真子集, 求 a 的范围;

(2) 若 $B = \{x \mid x^2 + x = 0\}$, 且 A 是 B 的子集, 求实数 a 的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

(1) 若 $12 < a < 60$, $15 < b < 36$, 求 $2a - b$, $\frac{a}{b}$ 的取值范围;

(2) 已知 x, y 满足 $-\frac{1}{2} < x - y < \frac{1}{2}$, $0 < x + y < 1$, 求 $3x - y$ 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知集合 $A = \{x \mid x^2 - x - 2 > 0\}$, $B = \{x \mid 2x^2 + (2k + 5)x + 5k < 0\}$.

(1) 若 $k < 0$, 求集合 B ;

(2) 若 $A \cap B$ 中有且只有一个整数 -2 , 求实数 k 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知实数 a, b 满足 $0 < a < 1$, $0 < b < 1$.

(1) 若 $a + b = 1$, 求 $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})$ 的最小值;

(2) 设 $0 < m < 12$, 求 $\frac{1}{m} + \frac{1}{12 - m}$ 的最小值.

参考答案

1. C 2. B 3. D 4. A 5. D 6. C 7. B 8. A

9. ABC 10. BCD 11. AB 12. BC

13. $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$ 14. $a > 2$ 15. $\frac{1}{2}$ 16. $2x^2 - 12x + 10; t \geq 8$

17. 解: (1) $\because \frac{x-2}{x-1} \geq 2,$

$\therefore \frac{x}{x-1} \leq 0$, 故 $0 \leq x < 1$, 故不等式的解集为 $\{x|0 \leq x < 1\}$;

(2) $\because ax^2 - (2a+1)x + 2 \leq 0$

$\therefore (ax-1)(x-2) \leq 0,$

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $2 \leq x \leq \frac{1}{a}$;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $x = 2$;

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{a} \leq x \leq 2$.

综上所述, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 解集为 $\left\{x \mid 2 \leq x \leq \frac{1}{a}\right\}$; 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 解集为 $\{2\}$;

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} \leq x \leq 2\right\}$.

18. 解: (1) $B = \{x | -2 \leq x < 4\}$;

$$\therefore A \cap B = \{x | 2 < x < 4\}, \quad \complement_R A = \{x | -3 \leq x \leq 2\}, \quad \complement_R B = \{x | x < -2, \text{ 或 } x \geq 4\},$$

$$(\complement_R A) \cup (\complement_R B) = \{x | x \leq 2, \text{ 或 } x \geq 4\};$$

$$(2) \because M = \{x | 2k-1 \leq x \leq 2k+1\} \text{ 是 } A \text{ 的真子集};$$

$$\therefore 2k-1 > 2, \text{ 或 } 2k+1 < -3;$$

$$\therefore k < -2, \text{ 或 } k > \frac{3}{2};$$

$$\therefore \text{实数 } k \text{ 的取值范围为 } \{k | k < -2, \text{ 或 } k > \frac{3}{2}\}.$$

19. 解: (1) $\because \emptyset \not\subseteq A$,

$$\therefore A = \{x | x^2 + 2x - a = 0\} \neq \emptyset,$$

$$\therefore \Delta = 4 + 4a \geq 0,$$

$$\therefore a \geq -1;$$

$$(2) B = \{x | x^2 + x = 0\} = \{0, -1\},$$

$$\because A \subseteq B, \therefore A = \emptyset, \{0\}, \{-1\}, \{0, -1\},$$

$$A = \emptyset, \text{ 则 } \Delta = 4 + 4a < 0, \therefore a < -1;$$

$$A \text{ 是单元素集合, } \Delta = 4 + 4a = 0, \therefore a = -1 \text{ 此时}$$

$$A = \{-1\}, \text{ 符合题意};$$

$$A = \{0, -1\}, \quad 0 - 1 = -1 \neq -2, \text{ 不符合}.$$

综上, $a \leq -1$.

20. (1) 解: $15 < b < 36$,

$$\text{可得 } \frac{1}{36} < \frac{1}{b} < \frac{1}{15},$$

$$\text{又 } 12 < a < 60,$$

$$\text{可得 } \frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 4;$$

$$(2) \because -\frac{1}{2} < x - y < \frac{1}{2},$$

$$\therefore -1 < 2x - 2y < 1,$$

$$\because 0 < x + y < 1,$$

$$\therefore -1 < 3x - y < 2.$$

21. 解: (1) $\because k < 0$,

$$\begin{aligned}\therefore B &= \{x \mid 2x^2 + (2k+5)x + 5k < 0\} = \{x \mid (2x+5)(x+k) < 0\} \\ &= \{x \mid -\frac{5}{2} < x < -k\}.\end{aligned}$$

$$(2) \text{ 集合 } A = \{x \mid x^2 - x - 2 > 0\} = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 2\},$$

$$B = \{x \mid 2x^2 + (2k+5)x + 5k < 0\} = \{x \mid (2x+5)(x+k) < 0\}.$$

当 $-\frac{5}{2} > -k$, 即 $k > \frac{5}{2}$ 时, $B = \{x \mid -k < x < -\frac{5}{2}\}$, $A \cap B$ 中没有整数 -2 , 不满足条件;

当 $k = \frac{5}{2}$ 时, $B = \emptyset$, 不满足条件;

$$\text{当 } k < \frac{5}{2} \text{ 时, } -\frac{5}{2} < -k, B = \{x \mid -\frac{5}{2} < x < -k\},$$

要使 $A \cap B = \{-2\}$, 则 $-2 < -k \leq -1$, 解得 $1 \leq k < 2$,

$\therefore A \cap B$ 中有且仅有一个整数 -2 , 实数 k 的取值范围是 $[1, 2)$.

22. 解: 已知实数 a, b 满足 $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

$$(1) \text{ 若 } a+b=1, (1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b}) = (1+\frac{a+b}{a})(1+\frac{a+b}{b}) = (2+\frac{a}{b})$$

$$(2+\frac{b}{a}) \geq 4+4+1=9, \text{ 当且仅当 } a=b \text{ 成立, 故最小值为 } 9;$$

$$(2) \because m+(12-m)=12,$$

$$\therefore \frac{m}{12} + \frac{12-m}{12} = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{12-m} = (\frac{1}{m} + \frac{1}{12-m})(\frac{m}{12} + \frac{12-m}{12})$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{12-m}{12m} + \frac{m}{12(12-m)} \geq \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

当且仅当 $m=6$ 时, 取 “=”,

综上所述, 原式的最小值为 $\frac{1}{3}$.