江苏省梅村高级中学2017—2018学年度第二学期月考试卷

高二数学（文）

2018．6

一、填空题（本大题共14小题，每小题5分，共计70分．不需要写出解答过程，请将答案填写在答题卡相应的位置上．）

1．设复数 z 满足 $iz=-3+i$ (i 为虚数单位)，则 z 的实部为______．

2．函数 $f(x)=\dfrac{\ln(2x-x^2)}{x-1}$ 的定义域为______．

3．已知幂函数 $f(x)$ 的图像过点($\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$)，则 $f(4)$ =______．

4．由命题“$\exists x\in R$，$x^2+2x+m\le 0$”是假命题，求得实数 m 的取值范围是(a，+∞)，则实数 a=______．

5．函数 $f(x)=\begin{cases}\log_3 x,\ x>0\\ 9^x,\ x\le 0\end{cases}$，则 $f(f(-1))$ 的值为______．

6．已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}+2\vec{b}|=5$，则向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 夹角的余弦值为______．

7. 函数 $f(x)=\log_a|x|$ 在(0，+∞)上单调递减，则 $f(-2)$ ______ $f(a+1)$（填“＜”,“＝”,“＞”之一)．

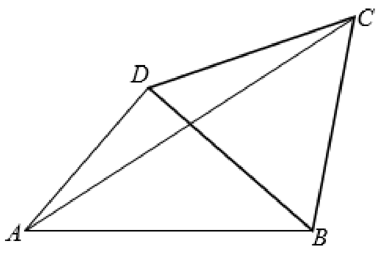
8．“a＞1”是“函数 $f(x)=a\cdot x+\cos x$ 在R上单调递增”的______条件（选填“充分不必要”,“必要不充分”,“充要”,“既不充分也不必要”)．

9．已知函数 $f(x)=(x+m)\ln x$，$m\in R$，当 $x\ne 1$ 时，恒有 $(x-1)f'(x)>0$，则关于 x 的不等式 $f(x)<2x-2$ 的解集为______．

10．已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)$，$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$ 为偶函数，且其图像的两条对称轴的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$，则 $f\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的值为______．

11．在△ABC中，角A，B，C的对边分别为 a，b，c，设 S 是△ABC的面积，若 $b^2+c^2-\dfrac{1}{3}a^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}S$，则角A的值为______．

12．如图，在平面四边形ABCD中，AB＝2，△BCD是



第12题

等边三角形，若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=1$，则 AD 的长为_______.

13．已知函数$f(x)$是定义在 R 上的奇函数，且当$x>0$时，$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}+m$，若函数$f(x)$有 5 个零点，则实数 m 的取值范围是_______.

14．已知$f(x)=(x+1)|x|-3x$，若对于任意$x\in R$，总有$f(x)\le f(x+a)$恒成立，则常数 a 的最小值是_______.

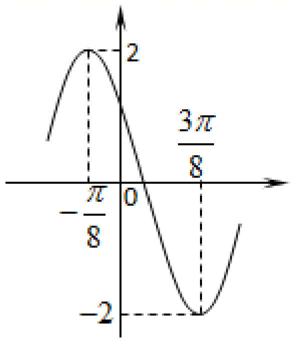
二、解答题（本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题纸指定区域内作答，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

15．（本题满分 14 分）

已知函数$f(x)=\mathrm{A}\sin(\omega x+\varphi)$（A＞0，$\omega$＞0，$|\varphi|$＜π）的一段图象如图所示．

（1）求函数$f(x)$的单调增区间；

（2）若$x\in[-\frac{3\pi}{8}，\frac{\pi}{4}]$，求函数$f(x)$的值域．



16．（本题满分 14 分）

命题 p：实数 x 满足$x^2-4ax+3a^2<0$（其中$a>0$），命题 q：实数 x 满足$\begin{cases}|x-1|\le 2\\ \frac{x+3}{x-2}\ge 0\end{cases}$.

（1）若$a=1$，且$p\wedge q$为真，求实数 x 的取值范围；

（2）若$\neg p$是$\neg q$的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围．

17．（本题满分 15 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，AD 为边 BC 上的中线．

（1）若 a＝4，b＝2，AD＝1，求边 c 的长；

（2）如 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=c^2$，求角 B 的大小．

18．（本题满分 15 分）

在△ABC 中，AB＝AC，点 P 为线段 AB 上的一点，且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$．

（1）若 $\overrightarrow{CP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$，求 λ 的值；

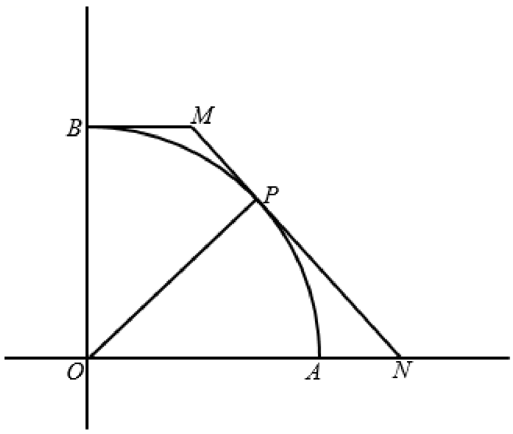
（2）若∠A＝120°，且 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}>4\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}$，求实数 λ 的取值范围．

19．（本题满分 16 分）

如图，OA，OB 是两条互相垂直的笔直公路，半径 OA＝2km 的扇形 AOB 是某地的一名胜古迹区域．当地政府为了缓解该古迹周围的交通压力，欲在圆弧 AB 上新增一个入口 P（点 P 不与 A，B 重合），并新建两条都与圆弧 AB 相切的笔直公路 MB，MN，切点分别是 B，P．当新建的两条公路总长最小时，投资费用最低．设∠POA＝θ，公路 MB，MN 的总长为 $f(\theta)$．

（1）求 $f(\theta)$ 关于 θ 的函数关系式，并写出函数的定义域；

（2）当 θ 为何值时，投资费用最低？并求出 $f(\theta)$ 的最小值．



20.（本题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=e^{x}$， $g(x)=ax+b(a$， $b\in R)$.

（1）设 $h(x)=xg(x)+1$．①若 $a\neq 0$，则 a， b 满足什么条件时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=h(x)$ 在 x＝0 处总有相同的切线？②当 a＝1 时，求函数 $F(x)=\dfrac{h(x)}{f(x)}$ 单调区间；

（2）若集合 $\left\{x\middle|\, f(x)<g(x)\right\}$ 为空集，求 ab 的最大值.

参考答案

1．1

2．(0，1)∪(1，2)

3．2

4．1

5．－2

6．$\dfrac{5}{16}$

7．＜

8．充分不必要

9．(1，e^2)

10．$\sqrt{2}$

11．$\dfrac{2\pi}{3}$

12．$\sqrt{6}$

13．(－1，$-\dfrac{1}{2}$)

14．3＋$\sqrt{10}$

15．（1）求得 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{3}{4}\pi)$

$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \le 2x+\dfrac{3}{4}\pi \le \dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$

$-\dfrac{5\pi}{8}+k\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{8}+k\pi$，$k\in Z$

∴函数 $f(x)$ 的单调增区间为$[-\dfrac{5\pi}{8}+k\pi$，$-\dfrac{\pi}{8}+k\pi]$，$k\in Z$

（2）∵ $x\in[-\dfrac{3\pi}{8}$，$\dfrac{\pi}{4}]$

∴ $2x+\dfrac{3}{4}\pi\in[0$，$\dfrac{5\pi}{4}]$

∴当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$f_{\min}(x)=-\sqrt{2}$，当 $x=-\dfrac{\pi}{8}$ 时，$f_{\max}(x)=2$

∴函数 $f(x)$ 的值域为$[-\sqrt{2}$，$2]$

16．（1）∵ $a=1$

∴命题 p：$1<x<3$；命题 q：$2<x\le 3$

∵ $p\wedge q$ 为真

∴ $2<x<3$，即实数 x 的取值范围为(2，3)

（2）由命题 p：$a<x<3a$，得$\neg p$：$x\le a$ 或 $x\ge 3a$

由命题 q：$2<x\leq 3$，得$\neg q$ ：$x\leq 2$ 或 $x>3$

∵ $\neg p$ 是$\neg q$ 的充分不必要条件

∴ $\begin{cases}3a>3\\a\leq 2\end{cases}$，求得$1<a\leq 2$

∴实数 a 的取值范围是(1，2]

17.（1）根据三角形中线公式可得：$\text{AD}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$

则 $c^2=\dfrac{1}{2}(4\text{AD}^2+a^2-2b^2)=\dfrac{1}{2}(4\times1^2+4^2-2\times2^2)=6$

∴边 c 的长为$\sqrt{6}$

（2）由 $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AD}}=c^2$，得$\left|\overrightarrow{\text{AD}}\right|\cos\angle\text{BAD}=c$，

将$\cos\angle\text{BAD}=\dfrac{\text{AD}^2+c^2-\dfrac{a^2}{4}}{2\text{AD}\cdot c}$代入上式，并化简得：$\text{AD}^2=c^2+\dfrac{a^2}{4}$

∴角 B 的大小为$\dfrac{\pi}{2}$

18.（1）∵ $\overrightarrow{\text{CP}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{CA}}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{CB}}$

∴ $\overrightarrow{\text{CP}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{CA}}+(1-\dfrac{3}{4})\overrightarrow{\text{CB}}$

∴ $\overrightarrow{\text{CP}}-\overrightarrow{\text{CB}}=\dfrac{3}{4}(\overrightarrow{\text{CA}}-\overrightarrow{\text{CB}})$

∴ $\overrightarrow{\text{BP}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{BA}}$

∴ $\overrightarrow{\text{AP}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{AB}}$，即 λ 的值为$\dfrac{1}{4}$

（2）由 $\overrightarrow{\text{AP}}=\lambda\overrightarrow{\text{AB}}$，可得$\overrightarrow{\text{CP}}=(1-\lambda)\overrightarrow{\text{CA}}+\lambda\overrightarrow{\text{CB}}$

将$\overrightarrow{\text{CP}}=(1-\lambda)\overrightarrow{\text{CA}}+\lambda\overrightarrow{\text{CB}}$代入$\overrightarrow{\text{CP}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}>4\overrightarrow{\text{AP}}\cdot\overrightarrow{\text{PB}}$得：

$((1-\lambda)\overrightarrow{\text{CA}}+\lambda\overrightarrow{\text{CB}})\cdot\overrightarrow{\text{AB}}>4\overrightarrow{\text{AP}}\cdot\overrightarrow{\text{PB}}$

化简得：$\lambda\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+(1-\lambda)\dfrac{1}{2}>4\lambda(1-\lambda)$，即$8\lambda^2-6\lambda+1>0$

求得：$\lambda>\dfrac{1}{2}$ 或$\lambda<\dfrac{1}{4}$

实数λ的取值范围$[0,\ \frac{1}{4})\cup(\frac{1}{2},\ 1]$

19.（1）$f(\theta)=4\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+2\tan\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$；

（2）化简（1）中$f(\theta)$的函数关系式可得：

$$f(\theta)=\frac{4\tan\frac{\theta}{2}-8}{\tan^2\frac{\theta}{2}-1}-4$$

令$2-\tan\frac{\theta}{2}=t(1<t<2)$，则$\tan\frac{\theta}{2}=2-t$，代入上式得：

$$y=\frac{-4t}{t^2-4t+3}-4=-\frac{4}{t+\frac{3}{t}-4}-4\geq-\frac{4}{2\sqrt{3}-4}-4=2\sqrt{3}$$

当且仅当$2-\tan\frac{\theta}{2}=t=\sqrt{3}$时取“＝”，此时$\tan\frac{\theta}{2}=2-\sqrt{3}$

求得$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以$\theta=\frac{\pi}{6}$

∴当$\theta=\frac{\pi}{6}$时，投资费用最低，此时$f(\theta)$的最小值为$2\sqrt{3}$

20.（1）①由题意求得：$h'(x)=2ax+b$，$f'(x)=e^x$

要使曲线$y=f(x)$与$y=h(x)$在x=0处总有相同的切线

则$h'(0)=f'(0)$，求得$b=1$

②$F(x)=\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{x^2+bx+1}{e^x}$，则$F'(x)=-\frac{(x+b-1)(x-1)}{e^x}$

当$b>0$时，当$x\in[1-b,\ 1]$时，$F'(x)>0$，

当$x\in(-\infty,\ 1-b]\bigcup[1,\ +\infty)$时，$F'(x)<0$，

当b=0时，$x\in R$时，$F'(x)\leq 0$

当$b<0$时，当$x\in[1，1-b]$时，$F'(x)>0$，

当$x\in(-\infty，1]\cup[1-b，+\infty)$时，$F'(x)<0$，

综上所述，当$b>0$时，$F(x)$的单调递增区间为$[1-b,1]$，单调递减区间为$(-\infty,1-b]$，$[1，+\infty)$；当$b=0$时，$F(x)$无单调增区间，单调减区间为R；当$b<0$时，$F(x)$的单调递增区间为$[1,1-b]$，单调递减区间为$(-\infty,1]$，$[1-b,+\infty)$.

（2）因为集合$\{x|f(x)<g(x)\}$为空集，即$e^x-ax-b<0$无解

令$G(x)=e^x-ax-b$，求得$G'(x)=e^x-a$

当$a\le 0$时，$G(x)$在R上单调递增，显然$e^x-ax-b<0$有解不符题意

当$a>0$时，$G(x)$在$(-\infty，\ln a]$单调递减，在$[\ln a，+\infty)$单调递增

所以$G_{\min}(x)=G(\ln a)=a-a\ln a-b\ge 0$时，符合题意

则$b\le a-a\ln a$，则$ab\le a^2-a^2\ln a$

令$m(a)=a^2-a^2\ln a$，求得$m'(a)=a-2a\ln a$

当$a\in(0，\sqrt{e})$时，$m'(a)>0$，当$a\in(\sqrt{e}，+\infty)$时，$m'(a)<0$

$\therefore$当$m_{\max}(a)=m(\sqrt{e})=(\sqrt{e})^2-(\sqrt{e})^2\ln\sqrt{e}=\dfrac{e}{2}$

$\therefore ab$的最大值为$\dfrac{e}{2}$