

江苏省梅村高级中学 2020—2021 学年度第一学期 12 月阶段检测

高二数学

一、单选题

1. 抛物线 $y=4x^2$ 的焦点坐标是 ()

- A. $(0,1)$ B. $(1,0)$ C. $\left(0, \frac{1}{16}\right)$ D. $\left(\frac{1}{16}, 0\right)$

2. 函数 $y=f(x)$ 的图像在 $x=3$ 处的切线方程是 $y=-3x+7$, 则 $f(3)-f'(3)$ 等于 ()

- A. 1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

3. 已知向量 $\vec{a}=(1,0,-1)$, 则下列向量中与 $\vec{a}$ 成 60° 夹角的是 ()

- A. $(-1,-1,0)$ B. $(1,-1,0)$
C. $(0,-1,1)$ D. $(-1,0,1)$

4. 已知 $f(x)=a\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\ln x(a>0)$ 在 $[2,+\infty)$ 上为单调递增函数, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $\left[\frac{4}{5}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{4}{5}, +\infty\right)$ C. $[1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

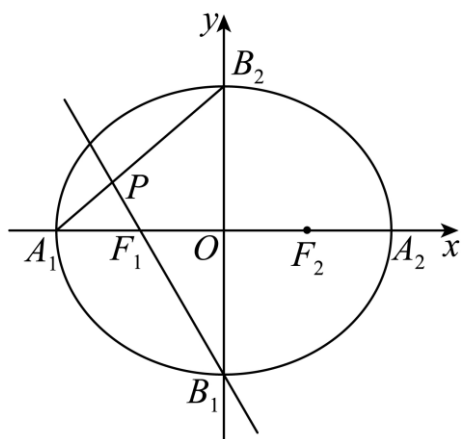
5. 命题 “ $\forall x \in [1,3], x^2-3a \leq 0$ ” 为真命题的一个充分不必要条件是 ()

- A. $a \leq 3$ B. $a \geq 3$
C. $a \leq 5$ D. $a \geq 5$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1=2$, $a_{n+1}=S_n$, 若 $a_n \in (0, 2022)$, 则称项 a_n 为“和谐项”, 则数列 $\{a_n\}$ 的所有“和谐项”的平方和为 ()

- A. $\frac{1}{3} \times 4^{12} - \frac{4}{3}$ B. $\frac{1}{3} \times 4^{11} - \frac{4}{3}$ C. $\frac{1}{3} \times 4^{10} + \frac{8}{3}$ D. $\frac{1}{3} \times 4^{11} + \frac{8}{3}$

7. 如图, 已知椭圆 C 中心在坐标原点, 左、右焦点 F_1, F_2 在 x 轴上, A_1, A_2, B_1, B_2 为椭圆 C 的顶点, 延长 B_1F_1 与 A_1B_2 交于点 P , 若 $\triangle B_1PB_2$ 为锐角三角形, 则该椭圆的离心率的取值范围 ()



A. $\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

B. $\left(0, \frac{\sqrt{5}-2}{2}\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$

D. $\left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}, 1\right)$

8. 已知函数 $h(x), g(x) (g(x) \neq 0)$ 分别是定义在 R 上的奇函数和偶函数，当 $x < 0$ 时，

$h'(x)g(x) - h(x)g'(x) < 0$ ，且 $h(-1) = 0$ ，若 $\frac{h(a)}{g(a)} < 0$ ，则 a 的取值范围为 ()

A. $(-1, 0)$

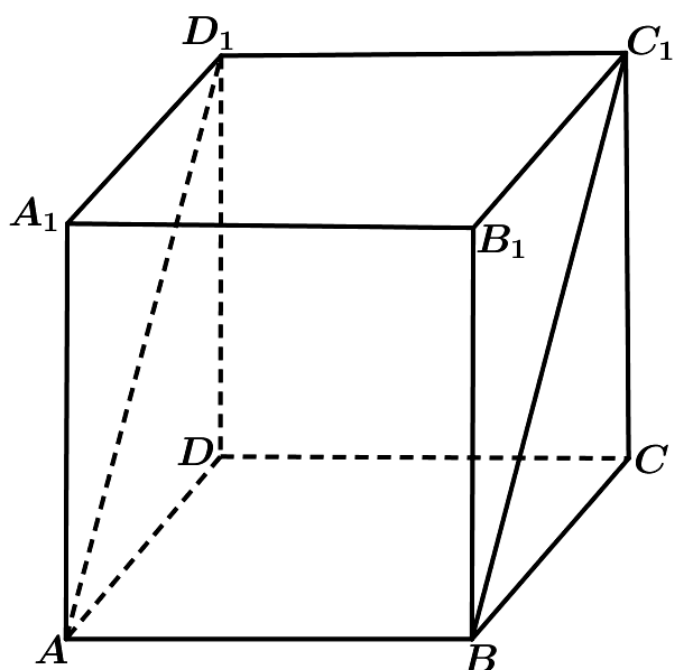
B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

D. $(-1, 1)$

二、多选题

9. 如图，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则下列四个命题正确的是 ()



A. 直线 BC 与平面 ABC_1D_1 所成的角等于 $\frac{\pi}{3}$

B. 点 C 到面 ABC_1D_1 的距离为 $\sqrt{2}$

C. 两条异面直线 D_1C 和 BC_1 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$

D. 三棱柱 $AA_1D_1-BB_1C_1$ 外接球表面积为 3π

10. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n , 已知 $S_{14}>0$, $S_{15}<0$, 正确的选项有 ()

A. $a_1>0$, $d<0$

B. $a_7+a_8>0$

C. S_6 与 S_7 均为 S_n 的最大值

D. $a_8<0$

11. 已知 F 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的右焦点, M 为左焦点, P 为椭圆上的动点, 且椭圆上至少有 21 个不同的

点 $P_i (i=1, 2, 3, \dots)$, $|FP_1|, |FP_2|, |FP_3|, \dots$ 组成公差为 d 的等差数列, 则 ()

A. $\square FPM$ 的面积最大时, $\tan \angle FPM = \frac{24}{7}$

B. $|FP_1|$ 的最大值为 8

C. d 的值可以为 $\frac{3}{10}$

D. 椭圆上存在点 P , 使 $\angle FPM = \frac{\pi}{2}$

12. 经研究发现: 任意一个三次多项式函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ 的图象都只有一个对称中心

点 $(x_0, f(x_0))$, 其中 x_0 是 $f''(x) = 0$ 的根, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数, $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导数. 若函数

$f(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ 图象的对称点为 $(-1, 2)$, 且不等式 $e^x - mx^e (\ln x + 1) \geq [f(x) - x^3 - 3x^2 + e] x^e$ 对

任意 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立, 则 ()

A. $a = 3$

B. $b = 1$

C. m 值可能是 $-e$

D. m 的值可能是 $-\frac{1}{e}$

三、填空题

13. 若点 $A(2, 1)$ 在直线 $mx + ny - 2 = 0$ 上, 且 $m > 0, n > 0$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为_____.

14. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 侧棱 $PA \perp$ 底面 ABC , $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = AC = 1$ 且 $PA = 2BC$, 则该三棱锥外接球的体积为_____.

15. 意大利画家列奥纳多·达·芬奇的画作《抱银貂的女人》中, 女士脖颈上悬挂的黑色珍珠项链与主人相互映衬呈现出不一样的美与光泽, 达·芬奇提出: 固定项链的两端, 使其在重力的作用下自然下垂, 项链

所形成的曲线是什么？这就是著名的“悬链线问题”，后人给出了悬链线的函数解析式：

$f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$ ，其中 a 为悬链线系数， $\cosh x$ 称为双曲余弦函数，其函数表达式为

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ，相应地双曲正弦函数的函数表达式为 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 。若直线 $x = m (m < 0)$ 与双曲

余弦函数 C_1 与双曲正弦函数 C_2 分别相交于点 A 、 B ，曲线 C_1 在点 A 处的切线 l_1 ，曲线 C_2 在点 B 处的切线 l_2 相交于点 P ，且 $\triangle PAB$ 为锐角三角形，则实数 m 的取值范围为_____。

16. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点为 F ，抛物线的准线与 x 轴的交点为 K ，点 $A(2, 4)$ ，过点 F 的动直线 l 与抛物线交于 M, N 不同的两点，点 M 在 y 轴上的射影为点 B ，设直线 KM, KN 的斜率分别为 k_1 和 k_2 。则 $|MA| + |MB|$ 的最小值为_____， $k_1 + k_2$ 的值为_____。

四、解答题

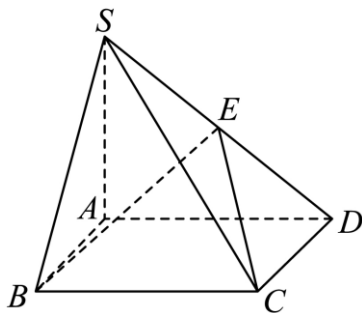
17. 已知 $m \in \mathbb{R}$ ，命题 $p: \forall x \in [0, 1], m \geq 2x - 2$ ，命题 $q: \exists x \in [-1, 1], m \leq x$ 。

- (1) 若 p 为真命题，求实数 m 的取值范围；
- (2) 若命题 p 与 q 一真一假，求实数 m 的取值范围。

18. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 4$ ， $a_3 - a_1 = 8$ ，在公差不为 0 的等差数列 $\{b_n\}$ ，中， $b_2 = 4$ ，且 b_1, b_2, b_4 成等比数列。

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式；
- (2) 记 $T_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ ，求 T_n 。

19. 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形， $SA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD = SA = 2$ ， $AB = 1$ ，点 E 是棱 SD 的中点。



- (1) 求异面直线 CE 与 BS 所成角的余弦值；
- (2) 求二面角 $E-BC-D$ 的大小。

20. 某村庄拟修建一个无盖圆柱形蓄水池（不计厚度）。设该蓄水池的底面半径为 r 米，高为 h 米，体积

为 V 立方米. 假设建造成本仅与表面积有关, 侧面积的建造成本为 100 元/平方米, 底面的建造成本为 160 元/平方米, 该蓄水池的总建造成本为 12000π 元 (π 为圆周率).

(1) 将 V 表示成 r 的函数 $V(r)$, 并求该函数的定义域;

(2) 讨论函数 $V(r)$ 的单调性, 并确定 r 和 h 为何值时该蓄水池的体积最大.

21. 设函数 $f(x) = \ln x - (a-1)x (a \in \mathbb{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当函数 $f(x)$ 有最大值且最大值大于 $a-3$ 时, 求 a 的取值范围.

22. 已知 O 为坐标原点, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 点 D, M, N 为 C 上的动点, O, M, N 三点共线, 离心率

$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 一条准线方程为 $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 直线 DM, DN 斜率分别为 $k_1, k_2 (k_1 k_2 \neq 0)$.

(1) 求椭圆方程;

(2) 证明: $k_1 k_2 = -\frac{1}{4}$;

(3) 当直线 DM 过点 $(1, 0)$ 时, 求 $\frac{1}{|DN|} + \frac{19}{2\sqrt{1+k_2^2}}$ 的最小值

