

江苏省无锡梅村高级中学 2018~2019 学年高一数学

《解三角形》单元测试试卷

2019. 3

试卷满分 130 分，考试时间 60 分钟

一、填空题（本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分．不需要写出解答过程，请将答案填写在答题卡相应的位置上．）

1. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a \cos(\frac{\pi}{2} - A) = b \cos(\frac{\pi}{2} - B)$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状是_____三角形．

2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\sin A = \frac{3}{4}$ ， $a = 10$ ，则边长 c 的取值范围是_____．

3. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a = \frac{\sqrt{5}}{2}b$ ， $A = 2B$ ，则 $\cos B =$ _____．

4. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a \cos A = b \cos B$ ，则 $\triangle ABC$ 形状一定是_____．

5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a = \sqrt{5}$ ， $b = \sqrt{15}$ ， $A = 30^\circ$ ，则 $c =$ _____．

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $a = 3\sqrt{2}$ ， $b = 2\sqrt{3}$ ，且 $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{6}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____．

7. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\sin A : \sin B : \sin C = k : (k+1) : 2k$ ，则 k 的取值范围是_____．

8. 在 $\triangle ABC$ 中， $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ ，则 a, b, c 的关系为_____．

9. $\triangle ABC$ 的两边长分别为 2, 3，其夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$ ，则其外接圆的直径为_____．

10. 根据下列情况，判断三角形解的情况，其中正确的是_____．

① $a=8$ ， $b=16$ ， $A=30^\circ$ ，有两解；

② $b=18$ ， $c=20$ ， $B=60^\circ$ ，有一解；

③ $a=5$ ， $c=2$ ， $A=90^\circ$ ，无解；

④ $a=30$ ， $b=25$ ， $A=150^\circ$ ，有一解．

11. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=7$ ， $AC=6$ ， M 是 BC 的中点， $AM=4$ ，则 $BC=$ _____．

12. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $a \cos B + b \cos A = c$ ， $b^2 + c^2$

$-a^2 = \sqrt{3}bc$ ，则角 $B=$ _____．

13. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $b+c=2a$ ， $3\sin A=5\sin B$ ，则角 $C=$ _____．

14. 太湖中有一小岛 C ，沿太湖有一条正南方向的公路，一辆汽车在公路 A 处测得小岛在公路的南偏西 15° 的方向上，汽车行驶 1 km 到达 B 处后，又测得小岛在南偏西 75°

的方向上，则小岛到公路的距离是_____km.

二、解答题（本大题共 4 小题，共计 60 分．请在答题纸指定区域内作答，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

15.（本题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a 、 b 、 c ，且 $a=2$ ， $\cos B=\frac{3}{5}$ ．

（1）若 $b=4$ ，求 $\sin A$ 的值；

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=4$ ，求 b 、 c 的值．

16.（本题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对的边分别是 a 、 b 、 c ，且 $\cos A=\frac{4}{5}$ ．

（1）求 $\sin^2 \frac{B+C}{2} + \cos 2A$ 的值；

（2）若 $b=2$ ， $\triangle ABC$ 的面积 S 为 3，求 a ．

17. (本题满分 16 分)

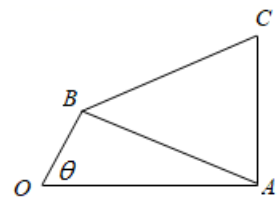
在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 并且 $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{c-b}{2c}$.

- (1) 试判断 $\triangle ABC$ 的形状并加以证明;
- (2) 当 $c=1$ 时, 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

18. (本题满分 16 分)

如图, 四边形 $OACB$ 中, a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边, 且满足 $\frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{2 - \cos B - \cos C}{\cos A}$.

- (1) 证明: $b+c=2a$;
- (2) 若 $b=c$, 设 $\angle AOB = \theta (0 < \theta < \pi)$, $OA=2OB=2$, 求四边形 $OACB$ 的面积.



参考答案

1. 等腰 2. $(0, \frac{40}{3}]$ 3. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ 4. 直角或等腰三角形 5. $\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{5}$

6. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ 7. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 8. $b^2 + c^2 = a^2$ 9. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ 10. ④

11. $\sqrt{106}$ 12. $\frac{\pi}{3}$ 13. $\frac{2\pi}{3}$ 14. $\sqrt{3}$

15.

解: (1) $\because \cos B = \frac{3}{5} > 0$, 且 $0 < B < \pi$, $\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{4}{5}$.

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, $\therefore \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{2}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$.

(2) $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2c \times \frac{4}{5} = 4$, $\therefore c = 5$.

由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 2^2 + 5^2 - 2 \times 2 \times 5 \times \frac{3}{5} = 17$, $\therefore b = \sqrt{17}$.

16.

解: (1) $\sin^2 \frac{B+C}{2} + \cos 2A = \cos^2 \frac{A}{2} + 1 - 2\sin^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos A + 1 - 2\sin^2 A = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos A - 2\sin^2 A$

$\therefore \cos A = \frac{4}{5}$. $0 < A < \pi$

$\therefore \sin A = \frac{3}{5}$.

则求 $\sin^2 \frac{B+C}{2} + \cos 2A = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos A - 2\sin^2 A = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{9}{25} = \frac{19}{50}$.

(2) $\triangle ABC$ 的面积 S 为 $3 = \frac{1}{2} bc \sin A$, $b = 2$, $\sin A = \frac{3}{5}$.

可得: $c = 5$.

由余弦定理: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

即 $\frac{4}{5} = \frac{4 + 25 - a^2}{20}$,

解得: $a = \sqrt{13}$.

17.

$$\begin{aligned}
&\text{解: (1) } \because \sin^2 A = \frac{c-b}{2c}, \\
&\therefore \frac{1-\cos A}{2} = \frac{c-b}{2c} = \frac{1}{2} - \frac{b}{2c}, \\
&\therefore \cos A = \frac{b}{c}, \\
&\therefore \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \\
&\therefore \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b}{c}, \\
&\therefore b^2+c^2-a^2=2b^2, \\
&\therefore b^2+a^2=c^2, \\
&\therefore \triangle ABC \text{ 为直角三角形, 且 } \angle C=90^\circ; \\
&\text{(2) 由 (1) 可得 } b^2+a^2=c^2, \\
&\therefore 1=b^2+a^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2, \text{ 当且仅当 } a=b \text{ 时取等号,} \\
&\therefore a+b \leq \sqrt{2}, \\
&\therefore \triangle ABC \text{ 周长的最大值为 } 1+\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned}
&\therefore \sin B \cos A + \sin C \cos A = 2 \sin A - \cos B \sin A - \cos C \sin A, \\
&\therefore \sin B \cos A + \cos B \sin A + \sin C \cos A + \cos C \sin A = 2 \sin A, \\
&\therefore \sin(A+B) + \sin(A+C) = 2 \sin A \dots (4 \text{ 分}) \\
&\therefore \sin C + \sin B = 2 \sin A, \\
&\therefore b+c=2a \dots (6 \text{ 分})
\end{aligned}$$

解: (2) 因为 $b+c=2a$, $b=c$, 所以 $a=b=c$, 所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形

$$S_{OACB} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2, \dots (8 \text{ 分})$$

$$= \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} (OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \theta) \dots (9 \text{ 分})$$

$$= \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta + \frac{5\sqrt{3}}{4} = 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{5\sqrt{3}}{4}, \dots (10 \text{ 分})$$

$$\because \theta \in (0, \pi), \therefore \theta - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$\text{当且仅当 } \theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ 时取最大值, } S_{OACB} \text{ 的最大值为 } 2 + \frac{5\sqrt{3}}{4} \dots ($$