

无锡市辅仁高级中学 2020-2021 学年度第二学期期中考试

高一数学试卷

命题人：

审核人：

一、单选题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. i 是虚数单位，复数 $(1-2i)^2$ 的虚部为（ ）

A. $4i$

B. 3

C. 4

D. -4

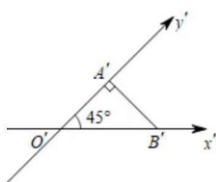
2. 如图，已知等腰直角 $\triangle O'A'B'$ ， $O'A'=A'B'$ 是一个平面图形的直观图，斜边 $O'B'=2$ ，则这个平面图形的面积是（ ）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2}$



3. 已知三角形 ABC 中， $a=\sqrt{2}$ ， $b=\sqrt{3}$ ， $B=60^\circ$ ，那么角 A 等于（ ）

A. 135°

B. 90°

C. 45°

D. 30°

4. 轴截面是正三角形的圆锥称作等边圆锥，则等边圆锥的底面积是侧面积的（ ）

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中， H 为 BC 上异于 B ， C 的任一点， M 为 AH 的中点，若 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ ，

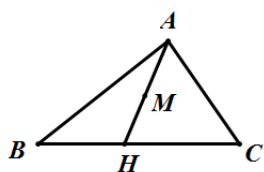
则 $\lambda + \mu$ 等于（ ）

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{3}$



6. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a=18$, $b=24$, $A=45^\circ$, 则此三角形有 ()

- A. 无解 B. 两解 C. 一解 D. 解的个数不确定

7. 欧拉是一位杰出的数学家, 为数学发展作出了巨大贡献, 著名的欧拉公式:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, 将三角函数的定义域扩大到复数集, 建立了三角函数和指数函数的关系,

它在复变函数论里占有非常重要的地位, 被誉为“数学中的天桥”. 结合欧拉公式, 复数

$z = \frac{1-2i}{1+i} + \sqrt{2}e^4$ 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

8. 半径为 2 的圆 O 上有三点 A 、 B 、 C 满足 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$, 点 P 是圆内一点, 则

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的取值范围为 ()

- A. $[-4, 14)$ B. $(-4, 14]$ C. $[-4, 4)$ D. $(-4, 4]$

二、多选题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 下列命题中正确的有 ()

- A. 空间内三点确定一个平面
B. 棱柱的侧面一定是平行四边形
C. 分别在两个相交平面内的两条直线如果相交, 则交点只可能在两个平面的交线上
D. 一条直线与三角形的两边都相交, 则这条直线必在三角形所在的平面内

10. 下列说法正确的是 ()

- A. 若 $|z|=2$, 则 $z \cdot \bar{z} = 4$
B. 若复数 z_1, z_2 满足 $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, 则 $z_1 z_2 = 0$
C. 若复数 z 的平方是纯虚数, 则复数 z 的实部和虚部相等
D. “ $a \neq 1$ ” 是 “复数 $z = (a-1) + (a^2-1)i (a \in \mathbb{R})$ 是虚数” 的必要不充分条件

11. $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}, \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}$, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $\vec{a}$ 为单位向量 B. $\vec{b}$ 为单位向量 C. $\vec{a} \perp \vec{b}$ D. $4\vec{a} + \vec{b} \perp \overrightarrow{BC}$

12. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, C 为钝角, 且 $c - b = 2b \cos A$, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $a^2 = b(b+c)$ B. $A = 2B$ C. $0 < \cos A < \frac{1}{2}$ D. $0 < \sin B < \frac{1}{2}$

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 复数 z 满足 $(1+i)z = |\sqrt{3}-1|$, 则 z 的共轭复数 $\bar{z} =$ _____.

14. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120° , 且 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$, 那么 $\vec{b}(3\vec{a} + \vec{b})$ 的值为 _____.

15. 圆台上、下底面的圆周都在一个直径为 20 的球面上, 其上、下底面半径分别为 8 和 10, 则该圆台的体积为 _____.

16. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $b=4, c=6$, 且 $a \sin B = 2\sqrt{3}$, 则角 $A =$ _____; 若角 A 的平分线为 AD , 则线段 AD 的长为 _____.

四、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本题满分 10 分) 已知 $z = (m^2 - 8m + 15) + (m^2 - 5m + 6)i$, 其中 i 是虚数单位, m 为实数.

(1) 当 z 为纯虚数时, 求 m 的值;

(2) 当复数 $z \cdot i$ 在复平面内对应的点位于第二象限时, 求 m 的取值范围.

18. (本题满分 12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的角 A 、 B 、 C 所对的边分别是 a 、 b 、 c ，设向量

$$\vec{m} = (a, b), \vec{n} = (\sin B, \sin A), \vec{p} = (b-2, a-2), .$$

(1) 若 $\vec{m} // \vec{n}$ ，求证： $\triangle ABC$ 为等腰三角形；

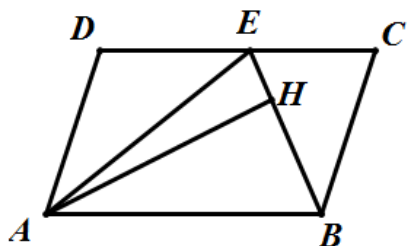
(2) 若 $\vec{m} // \vec{p}$ ，边长 $c=2$ ，角 $C = \frac{\pi}{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (本题满分 12 分) 如图在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $AD=2$ ， $\angle BAD=60^\circ$ ， E 为 CD 的中

点， H 为线段 BE 上靠近点 E 的四等分点，记 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

(1) 用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AH}$ ；

(2) 求线段 AH 的长.



20. (本题满分 12 分) 在① $\sqrt{3}b = a(\sin C + \sqrt{3}\cos C)$; ② $2a\cos A = b\cos C + c\cos B$; ③

$a\cos C + \frac{1}{2}c = b$, 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 然后解答补充完整的题目

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知_____.

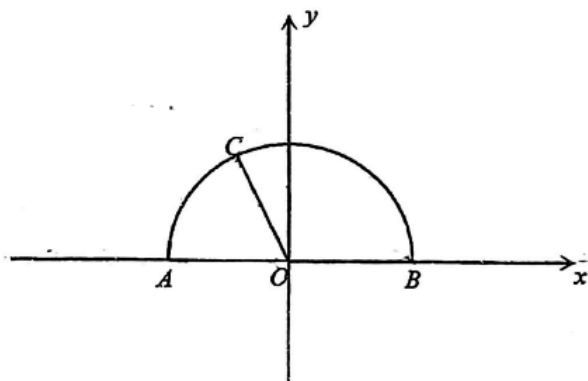
(1) 求角 A ;

(2) 若 $a = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

21. (本题满分 12 分) 已知半圆圆心为 O , 直径 $AB=4$, C 为半圆弧上靠近点 A 的三等分点, 若 P 为半径 OC 上的动点, 以 O 点为坐标原点建立如图所示的平面直角坐标系.

(1) 若 $\overrightarrow{PA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$, 求 $\overrightarrow{PA}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 夹角的大小;

(2) 试确定点 P 的位置, 使 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO}$ 取得最小值, 并求此最小值.



22. (本题满分 12 分) 如图所示, 某镇有一块空地 $\triangle OAB$, 其中 $OA=3\text{km}$, $\angle OAM=60^\circ$, $\angle AOB=90^\circ$, 当地政府计划将这块空地改造成一个旅游景点, 拟在中间挖一个人工湖 $\triangle OMN$, 其中 M, N 都在边 AB 上, 且 $\angle MON=30^\circ$, 挖出的泥土堆放在 $\triangle OAM$ 地带形成假山, 剩下的 $\triangle OBN$ 地带开设儿童游乐场. 为安全起见, 需在 $\triangle OAN$ 的周围安装防护网, 设 $\angle AOM = \theta$.

- (1) 当 $AM = \frac{3}{2}\text{km}$ 时, 求 θ 的值, 并求此时防护网的总长度;
- (2) 若 $\theta = 15^\circ$, 问此时人工湖用地 $\triangle OMN$ 的面积是堆假山用地 $\triangle OAM$ 的面积多少倍;
- (3) 为节省投入资金, 人工湖 $\triangle OMN$ 的面积要尽可能小, 问如何设计施工方案, 可使 $\triangle OMN$ 的面积最小? 最小面积是多少?

