

2022-2023 学年度第二学期期中考试

高一数学

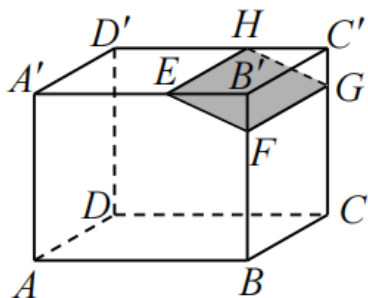
2023.04

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1. i 是虚数单位，复数 $i(2+i)$ 的虚部为 ()

- A. 1 B. -2 C. 2 D. $2i$

2. 如图，长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 被一个平面截成两个几何体，其中 $EH \parallel B'C' \parallel FG$ ，这两个几何体分别是 ()



- A. 三棱柱和四棱柱 B. 三棱柱和五棱柱 C. 三棱台和五棱台 D. 三棱柱和六棱柱

3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\cos C = \frac{2}{3}$ ， $AC=4$ ， $BC=3$ ，则 $\cos B =$ ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

4. 已知空间向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ，且 $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ， $\overrightarrow{BC} = -5\vec{a} + 6\vec{b}$ ， $\overrightarrow{CD} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$ ，则一定共线的三点是 ()

- A. A、B、C B. B、C、D C. A、B、D D. A、C、D

5. 已知 $\triangle ABC$ 中，三内角 A, B, C 满足 $2B=A+C$ ，三边 a, b, c 满足 $b^2 = ac$ ，则 $\triangle ABC$ ()

- A. 直角三角形 B. 等腰直角三角形
C. 等边三角形 D. 钝角三角形

6. i 是虚数单位，若复数 z 满足 $|z-3i|=2$ ，则 $|z|$ 的取值范围是 ()

- A. $[1, 5]$ B. $[3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}]$
C. $[0, 5]$ D. $[0, 3+\sqrt{2}]$

7. 母线长为 6 的圆锥的侧面展开图的圆心角等于 $\frac{4}{3}\pi$ ，则该圆锥的体积为 ()

- A. 32π B. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$ C. $32\sqrt{5}\pi$ D. 96π

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=5$, $AC=4$, $\cos A=\frac{1}{8}$, O 是 $\triangle ABC$ 的内心, 若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$, 其中 $x, y \in [0, 1]$,

则动点 P 的轨迹所覆盖图形的面积为 ()

- A. $\frac{15\sqrt{7}}{8}$ B. $\frac{5\sqrt{7}}{4}$ C. $\frac{10\sqrt{7}}{3}$ D. $3\sqrt{7}$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

9. 下列说法正确的是 ()

- A. 棱柱的侧棱长都相等
B. 有一个面是平行四边形的棱锥一定是四棱锥
C. 棱台的侧面是等腰梯形
D. 用一个平面截一个球，得到的截面是一个圆面

10. 已知向量 $\vec{a}+\vec{b}=(1,1)$, $\vec{a}-\vec{b}=(-3,1)$, $\vec{c}=(1,1)$, 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 θ , 则 ()

- A. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ B. $\vec{a} \perp \vec{c}$
C. $\vec{b} \parallel \vec{c}$ D. $\theta=135^\circ$

11. 在复数集内，下列命题是真命题的是 ()

- A. 若复数 $z \in \mathbf{R}$, 则 $\bar{z} \in \mathbf{R}$
B. 若复数 z 满足 $z^2 \in \mathbf{R}$, 则 $z \in \mathbf{R}$
C. 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 z_2 \in \mathbf{R}$, 则 $z_1 = \bar{z}_2$
D. 若复数 z 满足 $\frac{1}{z} \in \mathbf{R}$, 则 $z \in \mathbf{R}$

12. $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , S 为 $\triangle ABC$ 的面积, 且 $a=2\sqrt{3}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}S$,

下列选项正确的是 ()

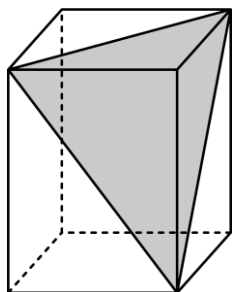
- A. $A=\frac{\pi}{6}$
B. 若 $b=4$, 则 $\triangle ABC$ 有两解
C. 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 则 b 取值范围是 $(2, 4)$
D. 若 D 为 BC 边上的中点, 则 AD 的最大值为 3

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. i 是虚数单位, 若复数 $(1+2i)(a-i)$ 是纯虚数, 则实数 a 的值为_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $ac=8$, $a+c=7$, $B=\frac{\pi}{3}$, 则 $b=$ _____.

15. 如图, 将一个长方体沿着相邻三个面的对角线截出一个棱锥, 则此棱锥的体积与剩下的几何体体积的比是_____.



16. 图 1 是一个正六边形蜂窝状置物架, 它设计简约、美化空间, 深受大众喜爱, 图 2 是从置物架图中抽象出的几何图形的示意图. 如图 2, 若 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AD} + \mu \overrightarrow{AH}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 则 $\lambda + \mu$ 的值为_____; 若正六边形的边长均为 2, 点 P 是折线 $ABCDEFGHIJKL$ 上的动点 (含端点), 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围为_____.



图1

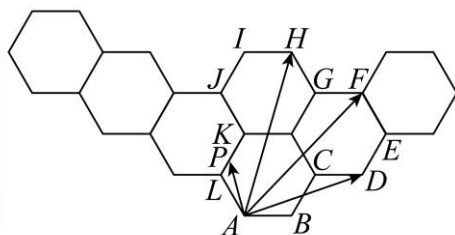


图2

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分.

17. 已知 i 是虚数单位, 复数 z 满足 $z(3+4i) = -5+10i$.

(1) 求复数 z 的共轭复数;

(2) 若 $a \in \mathbf{R}$, 且 $\left| \left(\frac{z-i}{\bar{z}+i} \right)^3 + a \right| = 3$, 求实数 a 的值.

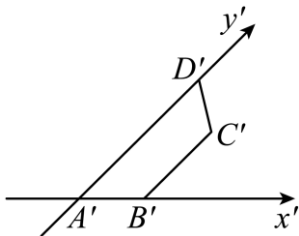
18. 设向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, 且 $|5\vec{a} - 8\vec{b}| = 7$.

(1) 求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角;

(2) 求 $|3\vec{a} + 4\vec{b}|$ 的大小.

19. 用斜二测画法画一个水平放置的平面图形的直观图为如图所示, 已知 $A'B' = 2$, $B'C' = 3$,

$A'D' = 4$ 且 $A'D' \parallel B'C'$.



(1) 求原平面图形 $ABCD$ 的面积;

(2) 将原平面图形 $ABCD$ 绕 AD 旋转一周, 求所形成的空间几何体的表面积和体积.

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 已知 $(a+c)(a-c)=b(b+c)$.

(1) 求角 A 的大小;

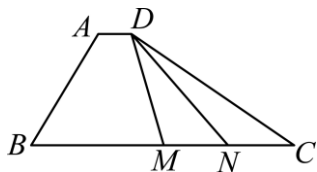
(2) 在下列两个条件中任选一个, 补充在下面问题中的横线上, 并解答.

若 $b=3, c=5$, 点 D 是 BC 边上的一点, 且_____.求线段 AD 的长.

① AD 是 $\triangle ABC$ 的中线;

② AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.

21. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B=60^\circ$, $AB=4$, $BC=8$, 且 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-4$.

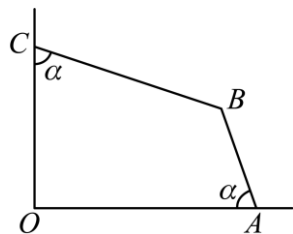


(1) 求实数 λ 的值;

(2) 若 M, N 是线段 BC 上动点, 且 $|\overrightarrow{MN}|=2$, 求 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值.

22. 阳春三月, 草长莺飞, 正是春游的好季节, 但是随着客流量的猛增, 我市景区道路拥堵、停车困难的问题日益凸显.市交通部门为缓解某热门景区停车难的问题, 决定在景区附近开辟一个如图所示的临时停车场 $OABC$, OA, OC 为互相垂直的墙体, 已有材料可建成的围栏 AB 与 BC 的总长度为 120 米, 且

$\angle BAO=\angle BCO$, 设 $\angle BAO=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.



(1) 当 $AB=40$ 米, $\alpha=\frac{5\pi}{12}$ 时, 求 AC 长;

(2) 当 $AB=60$ 米时, 求临时停车场 $OABC$ 面积 S 的最大值及此时 α 的值.