江苏省无锡市第一中学 2018-2019 学年第二学期期中试卷

高二数学（理）

一、填空题（本大题共 14 小题，共 70.0 分）

1. 复数 z=1-2i 的模为______.
2. $A_7^3-C_6^4$=______.
3. 复数$z=\frac{2-i}{1+i}$的实部为______.
4. 若正整数 x 满足方程$C_9^x=C_9^{2x+3}$，则 x=______.
5. 如果用反证法证明命题“设 a，$b\in R$，则方程 $x^2+ax+a-1=0$ 至少有一个实根”，那么首先假设______
6. 从甲、乙、丙、丁这 4 名学生中随机选派 2 人参加植树活动，则甲、乙两人中恰有一人被选中，共有______中不同的方案．（用数字作答）
7. （x-2y）^{5} 的展开式中第四项的二项系数为______．（用数字作答）
8. 甲乙两名教师和三名学生参加毕业拍照合影，排成一排，甲老师在正中间且甲乙教师相邻的排法共有______种．（用数字作答）
9. 已知复数 z 满足$|z-2i|\le 1$，则$|z|$的最大值为______.
10. 观察下列算式，猜想第 n（$n\in N^*$）行的表达式为______.

2=2
4+6=10
8+10+12=30
14+16+18+20=68
...

11. 二项式$(ax+\frac{b}{x})^n(a>0，b>0，n\in N^*)$展开式中，设“所有二项式系数和”为 A，“所有项的系数和”为 B，“常数项”的值为 C，若 A=B=256，C=70，则展开式中含 x^{-2} 的项为______.
12. 如果有关三位正整数形如“$a_1a_2a_3$”，满足 $a_1>a_2$ 且 $a_2<a_3$，则称这样的三位数为凹数（102，312，989 等），那么在三位正整数中，所有的凹数个数为______．（用数字作答）
13. 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点为 F_1，F_2，P 为椭圆上异于长轴端点的任意一点，在$\triangle PF_1F_2$中，记$\angle F_1PF_2$=α，$\angle PF_1F_2$=β，$\angle F_1F_2P$=γ，则有______.
14. 已知非空集合 M 满足 $M\subseteq\{0，1，2，\cdots n\}$（$n\ge 2$，$n\in N^+$）．若存在非负整数 k（$k\le n$），使得当 $a\in M$ 时，均有 $2k-a\in M$，则称集合 M 具有性质 P．设具有性质 P 的集合 M 的个数为 f（n），求 f（9）-f（8）的值为______.

二、解答题（本大题共 6 小题，共 90.0 分）

15. 设复数 z_1=1-ai（$a\in R$），复数 z_2=3+4i.

（1）若$z_1+z_2\in R$，求实数 a 的值；

（2）若$\frac{z_1}{z_2}$是纯虚数，求$|z_1|$.

16. （1）设 a，b 是两个不相等的正数，且 $2a+b=1$，试用分析法证明：$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\geq 9$；

（2）若 a，b 都是有理数，且$a+b\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^2$，求 a，b 的值．

17. 二项式$(ax+b)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n(a，b\in R，n\in N^*)$．

（1）当 $a=b=1$，$n=6$ 时，

求①$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 的值；

②$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$ 的值；

（2）当$a=1$，$b=-\sqrt{3}$，$n=8$时，求$(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)^2-(a_1+a_3+a_5+a_7)^2$的值．

18. 现有 4 个不同的球，和 4 个不同的盒子，把球全部放入盒内．

（1）共有多少种不同的方法？

（2）若没个盒子不空，共有多少种不同的方法？

（3）若恰有一个盒子不放球，共有多少种放法？

（4）若恰有两个盒子不放球，共有多少种放法？

19. 在杨辉三角形中，从第 3 行考试，除 1 以外，其它没一个数值是它肩上的两个数之和，这三角形数阵开头几行如右图所示．

（1）证明：$C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$；

（2）求证：第 m 斜列中（从右上到左下）的前 K 个数之和一定等于第 $m+1$ 斜列中的第 K 个数，即$C_{m-1}^{m-1}+C_m^{m-1}+C_{m+1}^{m-1}+C_{m+2}^{m-1}+\cdots+C_{m+k-2}^{m-1}=C_{m+k-1}^{m}(m\geq 2，m，k\in N^*)$

（3）在杨辉三角形中是否存在某一行，该行中三个相邻的数之比为 3：8：14？若存在，试求出这三个数；若不存在，请说明理由．

第0行　1

第1行　1　1

第2行　1　2　1

第3行　1　3　3　1

第4行　1　4　6　4　1

第5行　1　5　10　10　5　1

第6行　1　6　15　20　15　6　1．

20．正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且$2S_n = a_n^2 + n$对于任意的 $n \in N^*$均为成立．

（1）求 a_1，a_2，a_3；

（2）猜想数列$\{a_n\}$的通项公式并证明；

（3）比较a_n^{n+1}与$(n+1)^{a_n}$的大小并给出证明．

答案和解析

1.【答案】$\sqrt{5}$

【解析】

解：∵z=1-2i，

∴|z|= $\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$.

故答案为：$\sqrt{5}$.

直接利用复数模的计算公式求解.

本题考查复数模的求法，是基础题.

2.【答案】195

【解析】

解：$A_7^3-C_6^4$ =7×6×5-C$_6^2$ =210- $\frac{6\times5}{2\times1}$ =210-15=195,

故答案为：195

根据排列数和组合数公式进行计算即可.

本题主要考查排列组合数公式的计算，结合排列组合数公式是解决本题的关键.

3.【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】

解：∵ $z=\frac{2-i}{1+i}=\frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ ，

∴复数 $z=\frac{2-i}{1+i}$ 的实部为 $\frac{1}{2}$ ，

故答案为：$\frac{1}{2}$.

直接利用复数代数形式的乘除运算得答案.

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的基本概念，是基础题.

4.【答案】2

【解析】

解：由 $C_9^x=C_9^{2x+3}$ ，得 x=2x+3 或 x+2x+3=9,

得 x=-3（舍），或 x=2,

故答案为：2

根据组合数公式建立方程进行求解即可.

本题主要考查组合数公式的应用，结合组合数的性质建立方程是解决本题的关键.

5.【答案】方程 $x^2+ax+a-1=0$ 没有实数根

【解析】

解：反证法证明问题时，反设实际是命题的否定，

∴用反证法证明命题“设 a，b∈R，则方程 $x^2+ax+a-1=0$ 至少有一个实根”时，要做的假设是方程 $x^2+ax+a-1=0$ 没有实数根.

故答案为：方程 $x^2+ax+a-1=0$ 没有实数根

直接利用命题的否定写出假设即可.

本题考查反证法证明问题的步骤，基本知识的考查.

6.【答案】4

【解析】

解：甲、乙两人中恰有 1 人，则从甲乙两人中选 1 人，再从丙、丁两人中选 1 人，

故有 $C_2^1C_2^1=4$ 种，

故答案为：4.

甲、乙两人中恰有 1 人，则从甲乙两人中选 1 人，再从丙、丁两人中选 1 人，问题得以解决.

本题考查了组合问题，属于基础题.

7.【答案】10

【解析】

解：第四项的二项式系数为 $C_5^3=10$，

故答案为：10.

根据二项式系数的定义进行求解即可.

本题主要考查二项式定理的应用，结合二项式系数的定义是解决本题的关键. 比较基础. 注意要区分二项式系数和项的系数的区别.

8.【答案】12

【解析】

解：甲乙两名教师和三名学生参加毕业拍照合影，排成一排，甲老师在正中间且甲乙教师相邻的排法共有$C_2^1A_3^3$=12，

故答案为：12.

由排列、组合及简单计数问题得：甲乙两名教师和三名学生参加毕业拍照合影，排成一排，甲老师在正中间且甲乙教师相邻的排法共有$C_2^1A_3^3$=12，得解.

本题考查了排列、组合及简单计数问题，属中档题.

9.【答案】3

【解析】

解：设 z=a+bi，（a，b∈R），∵|z-2i|≤1，

∴ $\sqrt{x^2+(y-2)^2}$≤1，即 $x^2+(y-2)^2$≤1.

则|z|= $\sqrt{x^2+y^2}$ 的最大值为 2+1=3.

故答案为：3.

设 z=a+bi，（a，b∈R），由|z-2i|≤1，可得 $\sqrt{x^2+(y-2)^2}$≤1，即 $x^2+(y-2)^2$≤1．根据圆的标准方程可得|z|= $\sqrt{x^2+y^2}$ 的最大值.

本题考查了圆的标准方程及其性质、复数模的计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

10.【答案】（n^2-n+2）+（n^2-n+4）+⋯（n^2+n）=n^3+n

【解析】

解：由 2=2，4+6=10，8+10+12=30，14+16+18+20=68，

可得第 n 行的数字个数为 1+2+3+4+…+n= $\frac{n(n+1)}{2}$ ，

则第 n 行的最后一个数字为 2+($\frac{n(n+1)}{2}$ -1)×2=n(n+1)，

则第 n 行的第一个数字为 n^2-n+2=n(n-1)+2，

∴猜想第 n(n∈N^*)行的表达式为(n^2-n+2)+(n^2-n+4)+…(n^2+n)=n^3+n，

故答案为：(n^2-n+2)+(n^2-n+4)+…(n^2+n)=n^3+n.

先求出则第 n 行的最后一个数字为 2+($\frac{n(n+1)}{2}$ -1)×2=n(n+1)，和第 n 行的第一个数字为 n^2-n+2=n(n-1)+2，即可归纳得到结论.

本题考查归纳推理的应用，是基础题．解题时要认真审题，仔细解答，注意总结规律．

11.【答案】$56x^{-2}$

【解析】

解：由题意可得 $A=2^n$，$B=(a+b)^n$，∵通项公式为 $T_{r+1}=C_n^r\cdot a^{n-r}\cdot b^r\cdot x^{n-2r}$，令 $n=2r$，

可得 $C=C_{2r}^r\cdot a^r\cdot b^r$．

∵$A=B=256$，$C=70$，

∴$2^n=(a+b)^n=256$，$C_{2r}^r\cdot a^r\cdot b^r=70$．

∴$n=8=2r$，∴$r=4$，∴$a+b=2$，$a^4\cdot b^4=1$，∴$a=b=1$，

故通项公式为 $T_{r+1}=C_8^r\cdot x^{8-2r}$，令 $8-2r=-2$，求得 $r=5$，

故展开式中含 x^{-2} 的项为 $C_8^5\cdot x^{-2}=56x^{-2}$，

故答案为：$56x^{-2}$．

先利用二项式系数的性质、二项展开式的通项公式，求出 A、B、C 的值，以及 n、r 得子，可得展开式中含 x^{-2} 的项．

本题主要考查二项式定理的应用，二项展开式的通项公式，二项式系数的性质，属于基础题．

12.【答案】285

【解析】

解：∵$a_1>a_2$ 且 $a_2<a_3$，则十位上的数字既小于百位上的数字也小于个位上的数字，

∴当十位数字是 0 时有 9×9 种结果，

当十位数字是 1 时有 8×8 种结果，

当十位数字是 2 时有 7×7 种结果，

当十位数字是 3 时有 6×6 种结果，

当十位数字是 4 时有 5×5 种结果，

当十位数字是 5 时有 4×4 种结果，

当十位数字是 6 时有 3×3 种结果，

当十位数字是 7 时有 2×2 种结果,

当十位数字是 8 时有 1 种结果,

把这些数字相加得到 81+64+49+36+25+16+9+4+1=285,

故答案为:285.

十位上的数字既小于百位上的数字也小于个位上的数字,则当十位数字是 0 时有 9×9 种结果,当十位数字是 1 时有 8×8 种结果,以此类推当十位数字是 8 时有 1 种结果,把这些数字相加得到结论.

本题主要考查排列、组合以及简单计数原理的应用,体现了分类讨论的数学思想,属于中档题.

13.【答案】$e=\frac{sin\alpha}{sin\gamma+sin\beta}$

【解析】

解:设$|PF_1|=m$,$|PF_2|=n$.

由正弦定理可得:$\frac{m}{sin\gamma}=\frac{n}{sin\beta}=\frac{2c}{sin\alpha}$,可得:$\frac{m+n}{sin\gamma+sin\beta}=\frac{2c}{sin\alpha}$,

又 m+n=2a,

$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{sin\alpha}{sin\gamma+sin\beta}$.

故答案为:$e=\frac{sin\alpha}{sin\gamma+sin\beta}$.

设$|PF_1|=m$,$|PF_2|=n$.由正弦定理可得:$\frac{m}{sin\gamma}=\frac{n}{sin\beta}=\frac{2c}{sin\alpha}$,m+n=2a,即可得出.

本题考查了正弦定理、比例的性质、椭圆的标准方程及其性质,考查了推理能力与计算能力,属于中档题.

14.【答案】31

【解析】

qev:当 n=2 时,M={0},{1},{2},{0,2},{0,1,2}具有性质 P,

对应的 k 分别为 0,1,2,1,1,故 f(2)=5.n=k 时,具有性质 P 的集合 M 的个数为 f(t),

则当 n=k+1 时,f(t+1)=f(t)+g(t+1),

其中 g(t+1)表达 t+1∈M 也具有性质 P 的集合 M 的个数,

下面计算 $g(t+1)$ 关于 t 的表达式,

此时应有 $2k\geq t+1$, 即 $k\geq\frac{t+1}{2}$, 故对 $n=t$ 分奇偶讨论,

①当 t 为偶数时, $t+1$ 为奇数, 故应该有 $k\geq\frac{t+2}{2}$,

则对每一个 k, $t+1$ 和 $2k-t-1$ 必然属于集合 M, 且 t 和 $2k-t$, …, k 和 k 共有 $t+1-k$ 组数, 每一组数中的两个数必然同时属于或不属于集合 M,

故对每一个 k, 对应的具有性质 P 的集合 M 的个数为 $C_{t+1-k}^{0}+C_{t+1-k}^{1}+C_{t+1-k}^{2}$ $+\ldots+C_{t+1-k}^{t+1-k}=2^{t+1-k}$,

所以 $g(t+1)=2^{\frac{t}{2}}+2^{\frac{t-2}{2}}+\ldots+2+1=2\times2^{\frac{t}{2}}-1$.

②当 t 为奇数时, $t+1$ 为偶数, 故应该有 $k\geq\frac{t+1}{2}$,

同理 $g(t+1)=2^{\frac{t+1}{2}}+2^{\frac{t-1}{2}}+\ldots+2+1=2\sqrt{2}\times2^{\frac{t}{2}}-1$,

$\therefore f(t+1)=\begin{cases} f(t)+2\times2^{\frac{t}{2}}-1, t\text{为偶数} \\ f(t)+2\sqrt{2}\times2^{\frac{t}{2}}-t-5, t\text{为奇数} \end{cases}$,

由累加法得: $f(n)=\begin{cases} 6\times2^{\frac{n}{2}}-n-5, n\text{为偶数} \\ 4\times2^{\frac{n+1}{2}}-n-5, n\text{为奇 数} \end{cases}$,

$\therefore f(9)-f(8)=4\times2^{5}-9-5-(6\times2^{4}-8-5)=31$.

故答案为: 31.

当 $n=k$ 时, 具有性质 P 的集合 M 的个数为 $f(t)$, 当 $n=k+1$ 时, $f(t+1)=f(t)+g(t+1)$, 其中 $g(t+1)$ 表达 $t+1\in M$ 也具有性质 P 的集合 M 的个数, 计算 $g(t+1)$ 关于 t 的表达式, 此时应有 $2k\geq t+1$, 即 $k\geq\frac{t+1}{2}$, 故对 $n=t$ 分奇偶讨论, 利用集合 M 具有性质 P 即可得出.

本题考查了集合的运算性质、元素与集合之间的关系、组合数的计算公式、新定义, 考查了分类讨论方法、推理能力与计算能力, 属于难题.

15.【答案】解: (1) $\because z_1=1-ai$ ($a\in R$), $z_2=3+4i$,

$\therefore z_1+z_2=4+(4-a)i$,

由 $z_1+z_2\in R$, 得 $4-a=0$, 即 $a=4$;

(2) 由 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-ai}{3+4i}=\frac{(1-ai)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{3-4a}{25}-\frac{3a+4}{25}i$ 是纯虚数,

得$\begin{cases}3-4a=0\\3a+4\neq 0\end{cases}$，即$a=\frac{3}{4}$，

∴$|z_1|=|1-\frac{3}{4}i|=\sqrt{1^2+(-\frac{3}{4})^2}=\frac{5}{4}$.

【解析】

(1)由已知利用复数代数形式的加减化简，再由虚部为 0 求得 a 值；

(2)利用复数代数形式的乘除运算化简 $\frac{z_1}{z_2}$，由实部为 0 且虚部不为 0 求得 a 值，

再由复数模的计算公式求$|z_1|$.

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的基本概念，考查复数模的求

法，是中档题.

16.【答案】（1）证明：$(\frac{2}{a}+\frac{1}{b})(2a+b)$

$=\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}+5\geq 2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}+5=9$（得证）

（2）解：$a+\sqrt{2}b=(1-\sqrt{2})^2$，

$a+\sqrt{2}b=3-2\sqrt{2}$，$a-3=(-2-b)\sqrt{2}$

若$-2-b\neq 0$，则$(-2-b)\sqrt{2}$为无理数，$a-3$ 为有理数，

∴等式不成立，

∴$\begin{cases}-2-b=0\\a-3=0\end{cases}$，

∴$\begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}$

【解析】

(1)利用"1"的代换，结合基本不等式证明即可.

(2)利用已知条件，化简利用数值相等，列出方程组，然后求解即可.

本题考查不等式的证明，函数与方程的应用，考查分析问题解决问题的能

力.

17.【答案】解：（1）若 $a=b=1$，$n=6$ 时，二项式为$(1+x)^6$.

①令 $x=0$，则 $a_0=1$，

令 $x=1$，则 $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2^6=64$.

即 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=64-1=63$.

②$(1+x)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_6x^6$，

对 x 求导数得 $6(1+x)^5=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+6a_6x^5$，

令 $x=1$ 得 $6\times 2^5=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+6a_6=192$.

（2）当$a=1$，$b=-\sqrt{3}$，$n=8$时，$(x-\sqrt{3})^8=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_8x^8$，

令 $x=1$ 得，$(1-\sqrt{3})^8=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8$，

令 $x=-1$ 得，$(-1-\sqrt{3})^8=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_8$，

则$(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)^2-(a_1+a_3+a_5+a_7)^2=(a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8)$

（a_0-a_1+a_2-a_3+⋯+a_8）
=（1-$\sqrt{3}$）^{8}（1+$\sqrt{3}$）^{8}=[（1-$\sqrt{3}$）（1+$\sqrt{3}$）]^8=（-2）^{8}=256
【解析】

(1)当 a=b=1，n=6 时，令 x=1，可得 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ 的值，求出函数的导数，令 x=1 进行求解即可.

(2)根据平方差公式，分别令 x=1 和 x=-1 即可.

本题主要考查二项式定理的应用，分别令 x=1 和 x=-1 利用赋值法是解决本题的关键.

18.【答案】解：（1）将 4 个不同的球放入 4 个不同的盒子，则共有 4^4=256 种不同的放法，
（2）将 4 个不同的球放入 4 个不同的盒子，若没个盒子不空，则共有A_4^4=24 种不同的放法，
（3）将 4 个不同的球放入 4 个不同的盒子，恰有一个盒子不放球，则共有$C_4^1 {}^{C_4^2 A}_{33}$=144 种不同的放法，
（4）将 4 个不同的球放入 4 个不同的盒子，恰有两个盒子不放球，则共有C_4^2（C_4^2 ${}^{+C_2^1 C}_{34}$）=84 种不同的放法，
故答案为：：（1）256 （2）24 （3）144 （4）84
【解析】

由排列、组合及简单计数原理得：(1)将 4 个不同的球放入 4 个不同的盒子，则共有 4^4=256 种不同的放法，

(2)将 4 个不同的球放入 4 个不同的盒子，若没个盒子不空，则共有 A_4^4=24 种不同的放法，

(3)将 4 个不同的球放入 4 个不同的盒子，恰有一个盒子不放球，则共有 C_4^1 ${}^{C_4^2 A}_{33}$=144 种不同的放法，

(4)将 4 个不同的球放入 4 个不同的盒子，恰有两个盒子不放球，则共有 C_4^2（C_4^2 ${}^{+C_2^1 C}_{34}$）=84 种不同的放法，得解

本题考查了排列、组合及简单计数问题，属中档题

19.【答案】解：（1）$C_n^m + C_n^{m+1}$=$\frac{n!}{m!(n-m)!}$+$\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}$

=$\frac{n!(m+1)}{(m+1)!(n-m)!}$+$\frac{n!(n-m)}{(m+1)!(n-m)!}$

$=\frac{n!(m+1+n-m)}{(m+1)!(n-m)!}$

$=\frac{(n+1)!}{(m+1)![(n+1)-(m+1)]!}$

$=C_{n+1}^{m+1}$.

所以原式成立.

（2）由（1）得$C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$

左边$=C_m^m+C_m^{m-1}+C_{m+1}^{m-1}+C_{m+2}^{m-1}+\cdots+C_{m+k-2}^{m-1}$

$=C_{m+1}^m+C_{m+1}^{m-1}+C_{m+2}^{m-1}+\cdots+C_{m+k-2}^{m-1}$

$=\cdots$

$=C_{m+k-2}^m+C_{m+k-2}^{m-1}$

$=C_{m+k-1}^m$=右边∴原命题成立

（3）设在第 n 行的第 r-1，r，r+1 个数满足 3：8：14

即C_n^{r-1}：C_n^r：$C_n^{r+1}=3$：8：14

解的$\begin{cases}n=10\\r=3\end{cases}$∴三个数依次为 45，120，210

【解析】

(1)化成阶乘处理即可.

(2)将这列数表示出来，利用(1)的结论即可得到.

(3)假设存在第 n 行的第 r-1，r，r+1 个数满足这三个数之比为 3:8:14，列方程求 r，若 n，r 为不小于 2 的正整数，即为所求.

本题考查了二项式定理的性质，组合数的性质的证明，主要考查组合数的计算，考查观察、归纳、总结的能力．属于中档题.

20.【答案】解：（1）当 $n=1$ 时，$2a_1=a_1^2+1$，得（a_1-1）$^2=0$，

得 $a_1=1$，

当=2 时，2（a_1+a_2）$=a_2^2+2=2+2a_2$，

得 $a_2^2=2a_2$，得 $a_2=2$，

当 $n=3$ 时，2（$a_1+a_2+a_3$）$=a_3^2+3=6+2a_3$，

即 $a_3^2-2a_3-3=0$ 得（a_3+1）（a_3-3）=0，

得 $a_3=-1$（舍）或 $a_3=3$.

即 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$.

（2）猜想：$a_n=n$，

①当 $n=1$ 时，$a_1=1$，成立，

②假设当 $n=k$ 时，成立即 $a_k=k$，此时 $2S_k=a_k^2+k$，

则当 $n=k+1$ 时，

由 $2S_{k+1}=a_{k+1}^2+$（k+1），

即 2（S_k+a_{k+1}）$=a_{k+1}^2+$（k+1），

即 $2S_k+2a_{k+1}=a_{k+1}^2+$（k+1），

则 $a_k^2+k+2a_{k+1}=a_{k+1}^2+$（$k$+1），

即 $k^2+k+2a_{k+1}=a_{k+1}^2+$（$k$+1），

得 $a_{k+1}^2-2a_{k+1}+1-k^2=0$，

得$[a_{k+1}$-（$1-k$）$][a_{k+1}$-（$1+k$）$]=0$，
得 $a_{k+1}=1-k$，（舍）或 $a_{k+1}=1+k$，
由①②知，对任意的 $n\geq1$，$a_n=n$ 出成立）
（3）由（2）知 $a_n=n$，则$a_n^{n+1}=n^{n+1}$，$(n+1)^{a_n}=(n+1)^n$，
猜想：$n=1$，2 时，$n^{n+1}<(n+1)^n$
$n\geq3$ 时，$n^{n+1}>(n+1)^n$，
证明当 $n\geq3$ 时，不等式两边取对数得（n+1）ln$n$>$n$ln（n+1），
即$\frac{lnn}{n}>\frac{ln(n+1)}{n+1}$成立，
构造函数 $f(x)=\frac{lnx}{x}$，则不等式等价为当 $x\geq3$ 时，$f(x)>f(x+1)$，即可，
函数的导数 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-lnx}{x^2}=\frac{1-lnx}{x^2}$，
则当 $x\geq3$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 为减函数，
则当 $n\geq3$ 时，$f(n)>f(n+1)$，
即 $n^{n+1}>(n+1)^n$，成立.
【解析】

(1)利用数列递推关系，进行递推即可，

(2)利用数学归纳法进行归纳并证明，

(3)构造函数 $f(x)=\frac{lnx}{x}$，求函数的导数，利用导数研究函数的单调性，进行证明不等式即可.

本题主要考查递推数列的应用，结合数列的递推关系，进行递推以及利用数学归纳法以及构造函数，利用导数法证明不等式是解决本题的关键.