

2020-2021 梅村高二数学 10 月月考试卷

一、单选题

1. 设 $x \in \mathbb{Z}$, 集合 A 是奇数集, 集合 B 是偶数集. 若命题 $p: \forall x \in A, 2x \in B$, 则 ()

A. $\neg p: \forall x \in A, 2x \notin B$ B. $\neg p: \forall x \notin A, 2x \notin B$ C. $\neg p: \exists x \notin A, 2x \in B$ D. $\neg p: \exists x \in A, 2x \notin B$

2. 数列 $-1, 3, -5, 7, -9, \dots$, 的一个通项公式为 ()

A. $a_n = 2n - 1$ B. $a_n = (-1)^n(1 - 2n)$
C. $a_n = (-1)^n(2n - 1)$ D. $a_n = (-1)^{n+1}(2n - 1)$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_5 = \frac{9}{8}$, 且 $\left\{ \frac{1}{a_n - 1} \right\}$ 是等差数列, 则 $a_7 =$ ()

A. $\frac{10}{9}$ B. $\frac{10}{11}$ C. $\frac{12}{11}$ D. $\frac{13}{12}$

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差不为 0, 若 a_2, a_4, a_5 成等比, 则 $\frac{a_4 + a_7}{a_3 + a_5} =$ ()

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{11}{8}$ C. 1 D. 1 或 $\frac{1}{2}$

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_{13} = 52$, 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 且 $b_7 = a_7$, 则 $b_1 \cdot b_{13} =$ ()

A. 16 B. 8 C. 4 D. 2

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = \begin{cases} 2 + a_{n-2}, & n \text{ 为奇数} \\ 2 \times a_{n-1}, & n \text{ 为偶数} \end{cases} (n \geq 3)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为

()
A. 48 B. 49 C. 50 D. 61

7. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n \cos \frac{n\pi}{2}$, 其前 n 项和为 S_n , 则 S_{2012} 等于

A. 1006 B. 2012 C. 503 D. 0

8. 我国明代著名乐律学家、明宗室王子朱载堉在《律学新说》中提出的十二平均律, 即是现代在钢琴的键盘上, 一个八度音程从一个 c 键到下一个 c_1 键的 8 个白键与 5 个黑键(如图)的音频恰成一个公比为 $\sqrt[12]{2}$ 的等比数列的原理, 也即高音 c_1 的频率正好是中音 c 的 2 倍. 已知标准音 a_1 的频率为 440Hz , 那么频率为 $220\sqrt{2}\text{Hz}$ 的音名是 ()

C. $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n} - 1$

D. $4(c_n - c_{n-1}) = \pi a_{n-2} \cdot a_{n+1}$

三、填空题

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的奇数项依次成等差数列，偶数项依次成等比数列，且 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 + a_4 = 7$, $a_5 + a_6 = 13$, 则 $a_7 + a_8 =$ _____.

14. 已知 $a > 0, b > 0$, 若 $a + 4b + ab = 5$, 则 ab 的最大值是_____.

15. 若 x_1, x_2 是函数 $f(x) = x^3 - mx^2 + nx (m > 0, n > 0)$ 的两个不同的零点，且 $x_1, x_2, -3$ 这三个数适当排列后可以成等差数列，也可以适当排列后成等比数列，则 $m =$ _____, $n =$ _____.

16. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项是 1, 公比为 3, 等差数列 $\{b_n\}$ 的首项是 -5 , 公差为 1, 把 $\{b_n\}$ 中的各项按如下规则依次插入 $\{a_n\}$ 的每相邻两项之间，构成新数列 $\{c_n\}$: $a_1, b_1, a_2, b_2, b_3, a_3, b_4, b_5, b_6, a_4, \dots$, 即在 a_n 和 a_{n+1} 两项之间依次插入 $\{b_n\}$ 中 n 个项，则 $c_{2018} =$ _____。(用数字作答)

四、解答题

17. 已知数列 $\{b_n\}$ 为等比数列， $b_n = a_n + 2n - 1$, 且 $a_1 = 5, a_2 = 15$.

(1) 求 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. 若关于 x 的不等式 $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a \leq 0$ 的解集为 A , 不等式 $\frac{3}{2-x} \geq 2$ 的解集为 B .

(1) 已知 B 是 A 必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.

(2) 设命题 $p: \exists x \in B, x^2 + (2m+1)x + m^2 - m > 8$, 若命题 p 为假命题，求实数 m 的取值范围.

19. 甲乙两同学在复习数列时发现原来曾经做过一道数列问题，因纸张被破坏导致一个条件看不清，具体如下：等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知_____.

(1) 判断 S_4, S_3, S_5 的关系;

(2) 若 $a_3 - a_1 = 6$, 设 $b_n = \frac{3n-1}{|a_n|}$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_n < 5$.

甲同学记得缺少的条件是首项 a_1 的值，乙同学记得缺少的条件是公比 q 的值，并且他俩都记得第一问的答案是 S_4, S_3, S_5 成等差数列. 如果甲乙两同学记得的答案是正确的，请你通过推理把条件补充完整并解答此题.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n , 若对 $\forall n \in N_+, S_n = 2a_n - 2^{n+1}$ 恒成立

(1) 求证: 数列 $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ 为等差数列

(2) 若不等式: $2n^2 - n - 3 < (5 - \lambda)a_n$ 对 $\forall n \in N_+$ 恒成立, 求 λ 取值范围.

21. 已知函数 $f(x) = |x-1| - |x+2|$.

(I) 求不等式 $f(x) < x$ 的解集;

(II) 记函数 $f(x)$ 的最大值为 M . 若正实数 a, b, c 满足 $a + 4b + 9c = \frac{1}{3}M$, 求 $\frac{1-9c}{ab} + \frac{a-3c}{ac}$ 的最小值.

22. 设首项为 1 的正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $T_n = \frac{4 - (S_n - p)^2}{3}$, 其中 p 为常数.

(1) 求 p 的值;

(2) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 等比数列;

(3) 证明: “数列 $a_n, 2^x a_{n+1}, 2^y a_{n+2}$ 成等差数列, 其中 x, y 均为整数”的充要条件是“ $x=1$, 且 $y=2$ ”

