

无锡市第一中学 2019-2020 学年度第一学期十月阶段性质量检测

高二数学

一、选择题

1. 如果 $a < b < 0$, 那么下面一定成立的是 ()

- A. $ac < bc$ B. $a - b > 0$ C. $a^2 > b^2$ D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

2. 已知椭圆 C 左、右焦点坐标分别是 $(-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$, 离心率是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 则椭圆 C 方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ B. $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ C. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2^n$, 则 $a_{10} =$ ()

- A. 1024 B. 1023 C. 2048 D. 2047

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差不为 0. 若 a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则 $\{a_n\}$ 的前 6 项的和为 ()

- A. -24 B. -3 C. 3 D. 8

5. 关于 x 不等式 $ax^2 + (a+1)x + 1 < 0$ ($a < 0$) 的解集为 ()

- A. $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$ B. $\left(-1, -\frac{1}{a}\right)$ C. $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{a}\right) \cup (1, +\infty)$

6. 一个项数为偶数的等比数列, 它的偶数项和是奇数项和的 2 倍, 又它的首项为 1, 且中间两项的和为 24, 则此等比数列的项数为 ()

- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

7. 已知 $x, y > 0$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$, 则 $x + 2y$ 的最小值为

- A. $3 - 2\sqrt{2}$ B. $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$ C. $3 + 2\sqrt{2}$ D. $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$

8. 数列 $\{a_n\}$ 中, 已知对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 3^n - 1$, 则 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$ 等于 ()

- A. $(3^n - 1)^2$ B. $\frac{1}{2}(9^n - 1)$ C. $9^n - 1$ D. $\frac{1}{4}(3^n - 1)$

9. 设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点, P 是以 F_1, F_2 为直径的圆与椭圆的一个交点, 若 $\angle PF_1F_2 = 5\angle PF_2F_1$. 则椭圆的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

10. 已知函数 $f(n) = \begin{cases} n^2 & (\text{当 } n \text{ 为奇数时}), \\ -n^2 & (\text{当 } n \text{ 为偶数时}), \end{cases}$ 且 $a_n = f(n) + f(n+1)$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100}$ 等于 ()

- A. 0 B. 100 C. -100 D. 10200

11. 已知 -2 与 1 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根, 且 $a < 0$, 则 $\frac{a^2 + b^2 c^2}{ab^2}$ 的最大值为 ()

- A. -2 B. -4 C. -6 D. -8

12. 《九章算术》中有如下问题: 今有蒲生一日, 长三尺, 莞生一日, 长 1 尺. 蒲生日自半, 莞生日自倍. 问几何日而长等? 意思是: 今有蒲第一天长高 3 尺, 莞第一天长高 1 尺, 以后蒲每天长高前一天一半, 莞每天长高前一天的 2 倍. 若蒲、莞长度相等, 则所需时间为

(结果精确到 0.1. 参考数据: $\lg 2 = 0.3010$, $\lg 3 = 0.4771$.)

- A. 2.6 天 B. 2.2 天 C. 2.4 天 D. 2.8 天

二、填空题

13. 若关于 x 的方程 $x^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0$ 的两根 x_1, x_2 , 满足 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 则实数 a 的取值范围是_____.

14. 设数列 $\{a_n\}$ 是公差 $d < 0$ 的等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 $S_6 = 5a_1 + 10d$, 则 S_n 取最大值时, $n =$ _____.

15. 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 + xy = 1$, 则 $x + y$ 最小值为_____.

16. 若对任意的 $x \geq 0$, $x^2 - 2ax + a + 2 \geq 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_3 = 7, a_5 + a_7 = 26, \{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n .

(1) 求 a_n 及 S_n ;

(2) 令 $b_n = \frac{1}{a_n^2 - 1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 100 项和 T_{100} .

18. 已知 $f(x) = 2x^2 + bx + c$, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集是 $(0, 5)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 不等式组 $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x+k) < 0 \end{cases}$ 的正整数解只有一个, 求实数 k 取值范围;

(3) 若对于任意 $x \in [-1, 1]$, 不等式 $t \cdot f(x) \leq 2$ 恒成立, 求 t 的取值范围.

19. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设椭圆 左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上, 且 $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$, 求 $S_{\Delta F_1 P F_2}$.

20. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_n = \frac{3}{4}S_n + \frac{1}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 中, 对任何正整数 n 都有: $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1 = 2^{n+1} - n - 2$

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 是首项和公差都是 1 的等差数列, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, 数列 $\{a_n\}$ 是否是等差数列? 若是请求出通项公式.

22. 数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n - n^2 + 3n$ ($n \in \mathbf{N}^*$)

(1) 是否存在常数 λ, μ , 使得数列 $\{a_n + \lambda n^2 + \mu n\}$ 是等比数列, 若存在, 求出 λ, μ 的值若不存在, 说明理由;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n + n - 2^{n-1}}$, $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$, 证明: 当 $n \geq 2$ 时, $\frac{19n+7}{12(n+1)} \leq S_n < \frac{5}{3}$.

