锡山高级中学 2020~2021 学年度第二学期期末检测

高二年级数学试题

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. 已知 A，B 均为集合 U={1，3，5，7，9}的子集,且 A∩B={3},$(C_U B)\cap A=\{9\}$,则 A=（　　）

A. {1，3}　　B. {3，7，9}　　C. {3，5，9}　　D. {3，9}

【答案】D

2. 已知 i 为虚数单位，复数 $z=\dfrac{3+2i}{2-i}$，则以下命题为真命题的是（　　）

A. z　共轭复数为 $\dfrac{7}{5}-\dfrac{4i}{5}$　　B. z 的虚部为 $-\dfrac{7}{5}$

C. $|z|=3$　　D. z 在复平面内对应的点在第一象限

【答案】D

3. 已知向量 $\vec{a}=(x,2)$，$\vec{b}=(2,y)$，$\vec{c}=(2,-4)$，且 $\vec{a}//\vec{c}$，$\vec{b}\perp\vec{c}$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$

A. 3　　B. $\sqrt{10}$　　C. $\sqrt{11}$　　D. $2\sqrt{3}$

【答案】B

4. 围棋起源于中国，据先秦典籍《世本》记载：“尧造围棋，丹朱善之”，至今已有四千多年历史.围棋不仅能抒发意境、陶冶情操、修身养性、生慧增智，而且还与天象易理、兵法策略、治国安邦等相关联，蕴含着中华文化的丰富内涵.在某次国际围棋比赛中，甲、乙两人进入最后决赛.比赛采取五局三胜制，即先胜三局的一方获得比赛冠军，比赛结束.假设每局比赛甲胜乙的概率都为 $\dfrac{2}{3}$，且各局比赛的胜负互不影响，则在不超过 4 局的比赛中甲获得冠军的概率为（　　）

A. $\dfrac{1}{9}$　　B. $\dfrac{8}{27}$　　C. $\dfrac{16}{27}$　　D. $\dfrac{17}{81}$

【答案】C

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=-2a_2=6$，a_n,a_{n+2},a_{n+1} 为等差数列，则 $S_{2020}=$（　　）

A. $4+\dfrac{1}{2^{2020}}$　　B. $4+\dfrac{1}{2^{2018}}$

C. $4-\dfrac{1}{2^{2020}}$　　D. $4-\dfrac{1}{2^{2018}}$

【答案】D

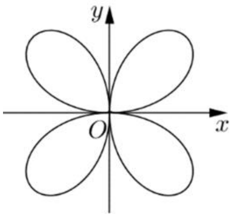
6. 函数 $y=\frac{1}{2}\sin 2x+\sin^2 x, x\in R$ 的值域是（　　）

A. $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$　　　　B. $[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}]$

C. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}]$　　　　D. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}]$

【答案】C

7. 数学中的数形结合也可以组成世间万物的绚丽画面，一些优美的曲线是数学形象美、对称美、和谐美的产物，曲线 $C:(x^2+y^2)^3=16x^2y^2$ 为四叶玫瑰线，下列结论正确的有（　　）



（1）方程 $(x^2+y^2)^3=16x^2y^2$（$xy<0$），表示的曲线在第二和第四象限；

（2）曲线 C 上任一点到坐标原点 O 的距离都不超过 2；

（3）曲线 C 构成的四叶玫瑰线面积大于 4π；

（4）曲线 C 上有 5 个整点（横、纵坐标均为整数的点）；

A. （1）（2）　　　　B. （1）（2）（3）

C. （1）（2）（4）　　　　D. （1）（3）（4）

【答案】A

8. 若函数 $f(x)=\ln x$ 与函数 $g(x)=x^2+2x+a(x<0)$ 有公切线，则实数 a 的取值范围是

A. $(\ln\frac{1}{2e},+\infty)$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\ln 2,+\infty)$

【答案】A

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 在发生公共卫生事件期间，有专业机构认为该事件在一段时间内没有发生大规模群体感染的标志为“连续 10 天，每天新增疑似病例不超过 7 人”过去 10 日，甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据信息如下：

甲地：中位数为 2，极差为 5；

乙地：总体平均数　2，众数为 2；

丙地：总体平均数为 1，总体方差大于 0；

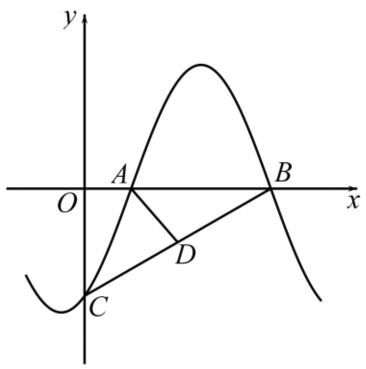
丁地：总体平均数为 2，总体方差为 3.

则甲、乙、丙、丁四地中，一定没有发生大规模群体感染的有（　　）

A. 甲地　　B. 乙地　　C. 丙地　　D. 丁地

【答案】AD

10. 如图，已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|\le\frac{\pi}{2}$）的图象与 x 轴交于点 A,B，与 y 轴交于点 C，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$，$\angle OCB=\frac{\pi}{3}$，$|OA|=2$，$|AD|=\frac{2\sqrt{21}}{3}$.则下列说法正确的有（　　）



A. $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 12

B. $\varphi=-\frac{\pi}{6}$

C. $f\left(x\right)$ 的最大值为 $\frac{16}{3}$

D. $f\left(x\right)$ 在区间 $(14,17)$ 上单调递增

【答案】ACD

11. 已知点 $A(-2,0)$，圆 $C:(x+4)^2+y^2=16$，点 P 在圆 C 上运动，给出下列命题，其中正确的有（　　）

A. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的取值范围是[8，25]

B. 在 x 轴上存在定点 $B(4,0)$，使 $|PA|:|PB|$ 为定值

C. 设线段 PA 的中点为 Q，则点 Q 到直线 $x+y-3=0$ 的距离的取值范围 $\left[3\sqrt{2}-1,3\sqrt{2}+1\right]$

D. 过直线 $x+y-4=0$ 上一点 T 引圆 C　两条切线，切点分别为 M，N，则 $\overline{CM}\cdot\overline{CN}$ 的取值范围是(-16，0]

【答案】BD

12. 在边长为 2 的等边三角形 ABC 中，点 D，E 分别是边 AC，AB 上的点，满足 $DE//BC$ 且 $\frac{AD}{AC}=\lambda$ $(\lambda\in(0,1))$，将□ADE 沿直线 DE 折到□$A'DE$ 的位置. 在翻折过程中，下列结论成立的是（　　）

A. 在边 $A'E$ 上存在点 F，使得在翻折过程中，满足 $BF//$ 平面 $A'CD$

B. 存在 $\lambda\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得在翻折过程中的某个位置，满足平面 $A'BC\perp$ 平面 $BCDE$

C. 若$\lambda=\frac{1}{2}$，当二面角$A'-DE-B$为直二面角时，$\left|A'B\right|=\frac{\sqrt{10}}{4}$

D. 在翻折过程中，四棱锥$A'-BCDE$体积的最大值记为$f(\lambda)$，$f(\lambda)$的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{9}$

【答案】D

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

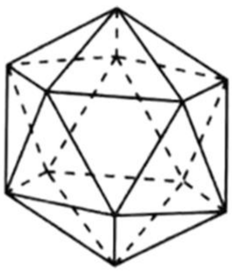
13. l，m是两条不同的直线，m垂直于平面α，则“$l\perp m$”是“$l//\alpha$”的___________条件.

【答案】必要不充分条件

14. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的一个焦点与抛物线$y^2=4x$的焦点重合，过点$M\left(-1,1\right)$且斜率为$\frac{1}{2}$的直线交椭圆$C$于A，$B$两点，若$M$是线段$AB$的中点，则椭圆$C$的方程为______.

【答案】$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

15. 早期的毕达哥拉斯学派学者注意到：用等边三角形或正方形为表面可构成四种规则的立体图形，即正四面体、正六面体、正八面体和正二十面体，它们的各个面和多面角都全等．如图，正二十面体是由 20 个等边三角形组成的正多面体，共有 12 个顶点，30 条棱，20 个面，是五个柏拉图多面体之一．如果把$\sin 36^\circ$按$\frac{3}{5}$计算，则该正二十面体的表面积与该正二十面体的外接球表面积之比等于___________.



【答案】$\frac{55\sqrt{3}}{36\pi}$

16. 某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折，规格为$20\text{dm}\times12\text{dm}$的长方形纸，对折 1 次共可以得到$10\text{dm}\times12\text{dm}$，$20\text{dm}\times6\text{dm}$两种规格的图形，它们的面积之和$S_1=240\text{dm}^2$，对折 2 次共可以得到$5\text{dm}\times12\text{dm}$，$10\text{dm}\times6\text{dm}$，$20\text{dm}\times3\text{dm}$三种规格的图形，它们的面积之和$S_2=180\text{dm}^2$，以此类推，则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为______；如果对折n次，那么$\sum_{k=1}^{n}S_k=$______dm^2.

【答案】 ①. 5 ②. $720-\frac{15(3+n)}{2^{n-4}}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知□ABC的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足

$$2\sin^2 A-2\sin^2 B-\sin^2 C-2\sin B\sin C=\cos^2 C-\cos 2C.$$

（1）求角 A；

（2）设点 D 在边 BC 上，且 $AD=2$，证明：若____________，则 $b+c$ 存在最大值或最小值.

请在下面 两个条件中选择一个条件填到上面的横线上，并证明.

① AD 是□ABC 的中线；② AD 是□ABC 的角平分线.

【答案】（1） $A=\frac{2\pi}{3}$；（2）答案见解析.

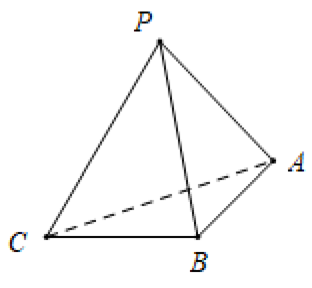
18. 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，满足：$a_n+S_n=\frac{n-1}{n^2+n}\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$.

（I）求证：数列$\left\{a_n+\frac{1}{n(n+1)}\right\}$为等比数列；

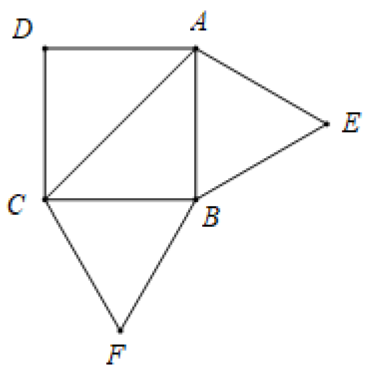
（II）求 S_n，并求 S_n 的最大值.

【答案】（I）见解析（II）$S_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2^n}$，$\frac{11}{80}$.

19. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的展开图如图二，其中四边形 $ABCD$ 为边长等于 $\sqrt{2}$ 的正方形，$\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 均为正三角形，在三棱锥 $P-ABC$ 中：



图一



图二

（1）证明：平面 $PAC\perp$平面 ABC；

（2）若 M 是 PA 的中点，求二面角 $P-BC-M$ 的余弦值.

【答案】（1）见解析（2）$\dfrac{5\sqrt{33}}{33}$

20. 当前，全国上下正处在新冠肺炎疫情“外防输入，内防反弹” 关键时期，为深入贯彻落实习近平总书记关于疫情防控的重要指示要求，始终把师生生命安全和身体健康放在第一位．结合全国第32个爱国卫生月要求，学校某班组织开展了“战疫有我，爱卫同行”防控疫情知识竞赛活动，抽取四位同学，分成甲、乙两组，每组两人，进行对战答题．规则如下：每次每位同学给出6道题目，其中有道是送分题(即每位同学至少答对1题)．若每次每组答对的题数之和为3的倍数，原答题组的人再继续答题；若答对的题数之和不是3的倍数，就由对方组接着答题．假设每位同学每次答题之间相互独立，无论答对几道题概率都一样，且每次答题顺序不作考虑，第一次由甲组开始答题．求：

(1)若第n次由甲组答题的概率为P_n，求P_n；

(2)前4次答题中甲组恰好答题2次的概率为多少？

【答案】(1) $P_n=\dfrac{1}{2}\cdot(-\dfrac{1}{3})^{n-1}+\dfrac{1}{2}$；(2) $\dfrac{100}{243}$．

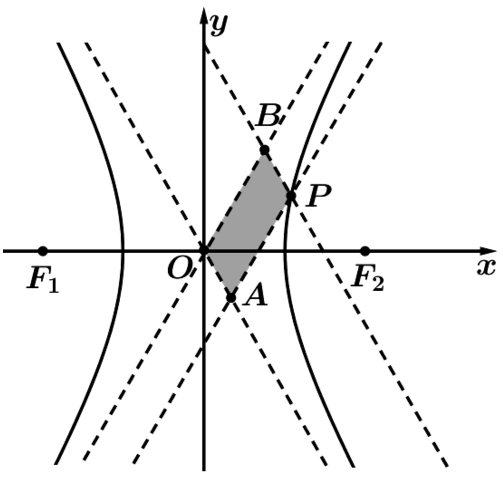
21. 已知函数$f\left(x\right)=kx^2+2x-\ln x$.

（1）讨论$f\left(x\right)$的单调性；

（2）若$f\left(x\right)$有2个极值点x_1，x_2，证明$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)>3$.

【答案】（1）见解析；（2）证明见解析.

22. 如图，已知双曲线$C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$的左右焦点分别为F_1、F_2，若点P为双曲线C在第一象限上的一点，且满足$|PF_1|+|PF_2|=8$，过点P分别作双曲线C两条渐近线的平行线PA、PB与渐近线的交点分别是A和B.



（1）求四边形$OAPB$的面积；

（2）若对于更一般的双曲线$C':\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$，点$P'$为双曲线$C'$上任意一点，过点$P'$分别作双曲线$C'$两条渐近线的平行线$P'A'$、$P'B'$与渐近线的交点分别是$A'$和$B'$.请问四边形$OA'P'B'$的面积为定值吗？若是定值，求出该定值（用$a$、$b$表示该定值）；若不是定值，请说明理由.

【答案】（1）$\frac{\sqrt{3}}{2}$；（2）是，且定值为$\frac{1}{2}ab$.