

江苏省梅村高级中学 2020-2021 学年度第二学期期中试卷

高二数学学科

命题：范永明 校对：谢淇 审核：徐敏亚

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 本试卷共 4 页，包含单项选择题，多项选择题，填空题，解答题，共 22 题，满分 150 分，时间 120 分钟。
2. 试题答案需作答在答题卡，答在试卷上无效。
3. 作答选择题时必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其它答案；作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其它位置作答一律无效。
4. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、单项选择题（共 8 题，每题 5 分）

1. 已知复数 $z(1+i) = |1-i|^2$ ，复数 z 的虚部是（ ）

- A. 1 B. -1 C. i D. -i

【答案】B

2. 在 $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中，只有第 5 项的二项式系数最大，则展开式的常数项为（ ）

- A. -7 B. 7
C. -28 D. 28

【答案】B

3. 2020 年 4 月 30 日，我国的 5G 信号首次覆盖了海拔超过 8000 米的珠穆朗玛峰峰顶和北坡登山路线。为了保证中国登山队测量珠峰高程的顺利直播，现从甲、乙、丙、丁这 4 名技术人员中随机安排 3 人分别去往北坡登山路线中标记为 I、II、III 的 3 个崎岖路段进行信号检测，若甲没有安排去往标记为 I 的崎岖路段，则不同的安排方法共有（ ）

- A. 12 种 B. 18 种 C. 24 种 D. 6 种

【答案】B

4. 已知随机变量 X 的分布列如下图，当 a 变化时，下列说法正确的是（ ）

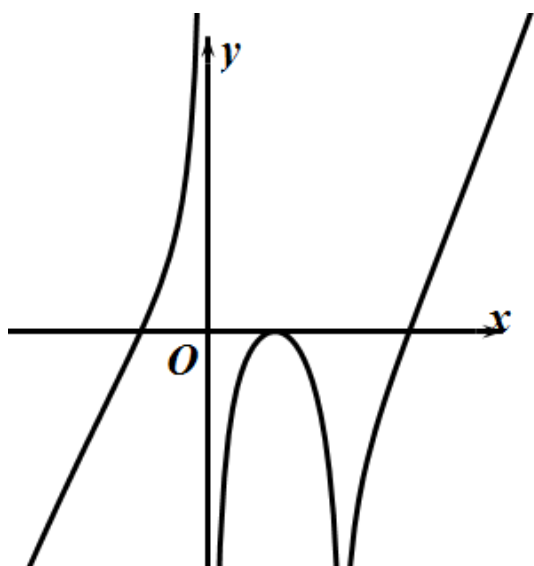
X	0	1	2	3
-----	---	---	---	---

P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}-a$	a	$\frac{1}{6}$
-----	---------------	-----------------	-----	---------------

- A. $E(X)$, $D(X)$ 均随着 a 的增大而增大
- B. $E(X)$, $D(X)$ 均随着 a 的增大而减小
- C. $E(X)$ 随着 a 的增大而增大, $D(X)$ 随着 a 的增大而减小
- D. $E(X)$ 随着 a 的增大而减小, $D(X)$ 随着 a 的增大而增大

【答案】A

5. 函数 $f(x)$ 的大致图像如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能是 ()



- A. $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln|x-2|$
- B. $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \ln(|x|-2)$
- C. $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \ln|x-2|$
- D. $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln(|x|-2)$

【答案】C

6. 某种芯片的良品率 X 服从正态分布 $N(0.95, 0.01^2)$, 公司对科技改造团队的奖励方案如下: 若芯片的良品率不超过 95%, 不予奖励; 若芯片的良品率超过 95% 但不超过 96%, 每张芯片奖励 100 元; 若芯片的良品率超过 96%, 每张芯片奖励 200 元. 则每张芯片获得奖励的数学期望为 () 元
- 附: 随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 0.9544$, $P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) = 0.9974$.

A. 52.28

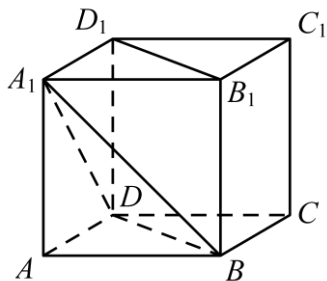
B. 65.87

C. 50.13

D. 131.74

【答案】B

7. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=1$ ，过直线 B_1D_1 的平面 $\alpha \perp$ 平面 A_1BD ，则平面 α 截该正方体所得截面的面积为

A. $\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

【答案】D

8. 已知 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leq e^3 \\ 6 - \ln x, & x > e^3 \end{cases}$ 若 $f(a) = f(b) = f(c)$ 且 $a < b < c$ ，则 $16a + \frac{e^6 b}{c}$ 的取值范围是 ()

A. $\left(17, \frac{16}{e^3} + e^6\right)$ B. $[12, 17)$ C. $\left[12, \frac{16}{e^3} + e^6\right)$ D. $\left(17, \frac{16}{e^3} + e^3\right)$

【答案】C

二、多项选择题（共 4 题，每题 5 分，少选得 2 分，多选或错选得 0 分）

9. 已知复数 z 满足 $\bar{z} \cdot z + 2i\bar{z} = 3 + ai$ ， $a \in R$ ，则实数 a 的值可能是 ()

A. 1

B. -4

C. 0

D. 5

【答案】ABC

10. 已知 $(ax^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ ($a > 0$) 的展开式中第 5 项与第 7 项的二项数系数相等，且展开式的各项系数之和为 1024，

则下列说法正确的是 ()

A. 展开式中奇数项的二项式系数和为 256

B. 展开式中第 6 项 系数最大

C. 展开式中存在常数项

D. 展开式中含 x^{15} 项的系数为 45

【答案】BCD

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$. 下列命题正确的是 ()

- A. 正方体的 12 条棱所在的直线中, 相互异面的有 24 对;
- B. 从正方体的 8 个顶点中选 4 个作为四面体的顶点, 可得到 64 个不同的四面体;
- C. 从正方体六个面的对角线中任取两条作为一对, 其中所成的角为 60° 的共有 36 对;
- D. 若给正方体每个面着一种颜色且相邻两个面不同色, 有 4 种颜色可供选择, 则不同着色方法共有 96 种.

【答案】AD

12. 拉格朗日中值定理是“中值定理”的核心内容, 定理如下: 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 则在区间 (a, b) 内至少存在一个点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$, $x = x_0$ 称为函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的中值点, 若关于函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上“中值点”的个数为 m , 函数 $g(x) = e^x$ 在区间 $[0, 1]$ 上“中值点”个数为 n , 则有 ()

(参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$, $\pi \approx 3.14$, $e \approx 2.72$.)

- A. $m = 1$
- B. $m = 2$
- C. $n = 1$
- D. $n = 2$

【答案】BC

三、填空题 (共 4 题, 每题 5 分)

13. 已知 i 为虚数单位, $x \in \mathbf{R}$, 复数 z 满足 $z = 1 + i$, 则 $|xz + (x - 5)i|$ 的最小值为_____.

【答案】 $\sqrt{5}$

14. 辛丑牛年春晚现场请来了荣获“人民英雄”“时代楷模”“全国道德模范”称号的几位先进人物代表共度新春佳节, 他们是“人民英雄”陈薇, “时代楷模”毛相林、张连刚, 林占禧, “全国道德模范”张晓艳、周秀芳、张家丰, 朱恒银, 从中选出两位荣誉称号不同的代表先后给全国人民拜年, 则不同的发言情况有_____种.

【答案】38

15. 设三棱锥 $S-ABC$ 的所有棱长均为 1, 点 D, E, F 满足 $3\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$, $3\overrightarrow{SE} + \overrightarrow{BE} = \vec{0}$, $3\overrightarrow{SF} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$, 则三棱锥 $S-ABC$ 的外接球被平面 DEF 所截的截面面积为_____.

【答案】 $\frac{5\pi}{24}$

16. 对于函数 $y = f(x)$, 若存在 x_0 , 使 $f(x_0) = -f(-x_0)$, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 与点 $(-x_0, -f(x_0))$ 均称为

函数 $f(x)$ 的“积分点”. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 16-ax, & x > 0 \\ 6x-x^3, & x \leq 0 \end{cases}$, 若点 $(2, f(2))$ 为函数 $y = f(x)$ 一个“积分点”, 则

$a =$ _____; 若函数 $f(x)$ 存在 5 个“积分点”, 则实数 a 的取值范围为 _____

【答案】 ①. 6 ②. $(6, +\infty)$

四、解答题（共 6 题）

17. (1) 计算: $\frac{i-2}{1+2i} + (5+i^{19}) - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{22}$.

(2) 若复数 z 满足方程: $|z|^2 + (z + \bar{z})i = 1 - i$ (i 为虚数单位), 求复数 $|z|$.

【答案】 (1) $5+i$; (2) 1.

18. 为了解学生是否会参加定向越野活动进行调查. 随机抽取了 200 位中小學生进行调查、得到如下数据: 准备参加定向越野的小学生有 80 人, 不参加定向越野的小学生有 40 人, 准备参加定向越野的中学生有 40 人.

(1) 完成下列 2×2 列联表, 并根据列联表判断是否有 97.5% 的把握认为这 200 位参与调查的中小學生是否准备参加定向越野与中小學生年龄有关.

	准备参加定向越野	不参加定向越野	合计
小学生			
中学生			
合计			

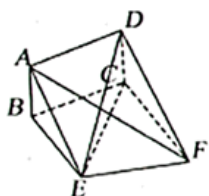
(2) 现将小学生分组进行比赛. 两人一组, 每周进行一轮比赛, 每小组两人每人跑两张地图 (跑一张地图视为一次), 达到教练设定的成绩标准的次数之和不少于 3 次称为“优秀小组”. 小超与小红同一小组, 小超、小红达到教练设定的成绩标准的概率分别为 P_1 , P_2 , 且 $P_1 + P_2 = \frac{4}{3}$, 理论上至少要进行多少轮比赛, 才能使得小超、小红小组在比赛中获得“优秀小组”次数的期望值达到 16 次? 并求此时 P_1 , P_2 的值.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a+b+c+d$.

$P(\chi^2 \geq x_0)$	0.50	0.25	0.05	0.025	0.010
x_0	0.455	1.323	3.840	5.024	6.635

【答案】(1) 有97.5%的把握认为这 200 位参与调查的中小學生是否准备参加定向越野与中小學生年龄有关；(2) 理论上至少要进行 27 轮游戏，此时 $P_1 = P_2 = \frac{2}{3}$.

19. 如图所示，矩形 $ABCD$ 和梯形 $BEFC$ 所在平面互相垂直， $BE \parallel CF$ ， $\angle BCF = \angle CEF = 90^\circ$ ， $AD = \sqrt{2}$ ， $EF = \sqrt{3}$.



(1) 求证： $EF \perp$ 平面 DCE

(2) 当 AB 的长为何值时，二面角 $A-EF-C$ 的大小为 60° .

【答案】(1) 证明见解析；(2) $2\sqrt{2}$.

20. 班主任为了对本班學生的考试成绩进行分析，决定从本班 24 名女同學，18 名男同學中随机抽取一个容量为 7 的样本进行分析.

(1) 如果按照性别比例分层抽样，可得到多少个不同的样本？（写出算式即可，不必计算出结果）

(2) 如果随机抽取的 7 名同學的数学，物理成绩（单位：分）对应如下表：

學生序号 i	1	2	3	4	5	6	7
数学成绩 x_i	60	65	70	75	85	87	90
物理成绩 y_i	70	77	80	85	90	86	93

若规定 85 分以上（包括 85 分）为优秀，从这 7 名同學中抽取 3 名同學，记 3 名同學中数学和物理成绩均为优秀的人数为 ξ ，求 ξ 的分布列和数学期望.

【答案】(1) 不同的样本的个数为 $C_{24}^4 C_{18}^3$ ；(2) 分布列见解析， $E(\xi) = \frac{9}{7}$.

21. 设 $n \in \mathbb{N}^*$ ，且 $n \geq 3$ ，记集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的所有 3 个元素的子集为 $A_1, A_2, \dots, A_{C_n^3}$ ， m_i 为 A_i 中的最大元素 $i = 1, 2, \dots, C_n^3$.

(1) 当 $n = 4$ 时，求 $m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ 的值；

(2) 求 $m_1 + m_2 + \dots + m_{C_n^3}$ 的值.

【答案】(1) 15, (2) $\frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{8}$

22. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 + bx$, 函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 0.

(1) 试用含有 a 的式子表示 b , 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 对于函数 $f(x)$ 图象上的不同两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 如果在函数 $f(x)$ 图象上存在点

$M(x_0, y_0) (x_0 \in (x_1, x_2))$, 使得在点 M 处的切线 $l \parallel AB$, 则称 AB 存在“跟随切线”. 特别地, 当 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

时, 又称 AB 存在“中值跟随切线”. 试问: 函数 $f(x)$ 上是否存在两点 A, B 使得它存在“中值跟随切线”, 若

存在, 求出 A, B 的坐标, 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) $b = a - 1$, 单调性见解析; (2) 不存, 理由见解析