

江苏省无锡市市北高级中学 2022-2023 学年高一下学期期中数学试题

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列判断正确的是()

- A. 圆锥的侧面展开图可以是一个圆面
- B. 底面是等边三角形，三个侧面都是等腰三角形的三棱锥是正三棱锥
- C. 一个西瓜切 3 刀最多可切成 8 块
- D. 过球面上任意两不同点的大圆有且只有一个

2. 已知复数 $z = \frac{-1-2i}{(1+i)^2}$ ，则 $\bar{z} =$ ()

- A. $-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i$
- B. $-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$
- C. $-1 + \frac{1}{2}i$
- D. $-1 - \frac{1}{2}i$

3. 已知等边三角形 ABC 的边长为 1， $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ ，那么 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} =$ ()

- A. 3
- B. -3
- C. $\frac{3}{2}$
- D. $-\frac{3}{2}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $a=3, b=\sqrt{7}, c=2$ ，那么 B 等于()

- A. 30°
- B. 45°
- C. 60°
- D. 120°

5. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O ，且 $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BC}$ ，则向量 $\overrightarrow{BA}$ 在向量 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为()

- A. $\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$
- B. $\frac{\sqrt{3}}{4}\overrightarrow{BC}$
- C. $-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$
- D. $-\frac{\sqrt{3}}{4}\overrightarrow{BC}$

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $A=60^\circ$ ， $b=1$ ，其面积为 $\sqrt{3}$ ，则 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$ 等于()

- A. $3\sqrt{3}$
- B. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$
- C. $\frac{26\sqrt{3}}{3}$
- D. $\frac{\sqrt{39}}{2}$

7. 已知四面体 $P-ABC$ 的外接球的球心 O 在 AB 上，且 $PO \perp$ 平面 ABC ， $2AC = \sqrt{3}AB$ ，若四面体 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{3}{2}$ ，求球的表面积()

- A. 8π
- B. 12π
- C. $8\sqrt{3}\pi$
- D. $12\sqrt{3}\pi$

8. 在 $\triangle ABC$ 中， $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{6} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\sin B = \cos A \sin C$ ， P 为线段 AB 上的动点（不包括端点），且

$\overrightarrow{CP} = x \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} + y \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}$ ，则 $\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{3}}{y}$ 的最小值为()

- A. $2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$
- B. $1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$
- C. $2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$
- D. $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

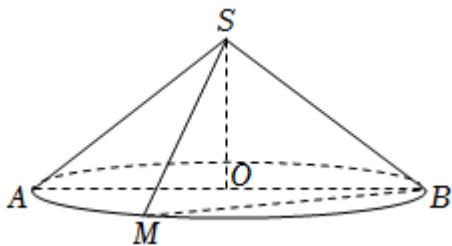
9. 已知平面向量 $\vec{a} = (3, -4)$, $\vec{b} = (x, 3)$ ，则正确的有 ()

- A. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $x = -\frac{9}{4}$
- B. 与 $\vec{a}$ 共线的单位向量是 $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$
- C. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $\vec{a}$ 在 $3\vec{a} + 4\vec{b}$ 方向上的投影向量是 $(3, 0)$
- D. 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 的夹角为钝角，则 x 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{1}{6})$

10. 已知 $z_1 = 2 + 3i$ ， $z_2 = m - i (m \in \mathbb{R})$ ，则下列说法正确的有 ()

- A. 若 $\frac{z_1}{z_2}$ 为实数，则 $m = -\frac{2}{3}$
- B. $z_1 \cdot z_2$ 的共轭复数是 $(2m + 3) - (3m - 2)i$
- C. $|z_1 - z_2|$ 的最小值是 4
- D. 满足 $|z - z_1| = 1$ 的复数 z 在复平面上的对应点 Z 的集合是以 $(-2, -3)$ 为圆心，以 1 为半径的圆

11. 如图所示，圆锥 SO 的底面半径 $r = \sqrt{3}$ ，高 $SO = 1$ ， AB 是底面圆周的一条直径， M 为底面圆周上与 B 不重合的一点，则下列命题正确的是 ()



- A. 圆锥 SO 的体积为 π
- B. 圆锥 SO 的表面积为 $(2\sqrt{3} + 3)\pi$
- C. $\triangle SBM$ 的面积的最大值是 $\sqrt{3}$
- D. 有一只蚂蚁沿圆锥的侧面从点 A 爬行到点 B ，则蚂蚁爬行的最短距离为 $\sqrt{3}\pi$

12. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $c - b = 2b \cos A$ ，则下列结论正确的有 ()

A. $A = 2B$

B. B 的取值范围为 $(0, \frac{\pi}{4})$

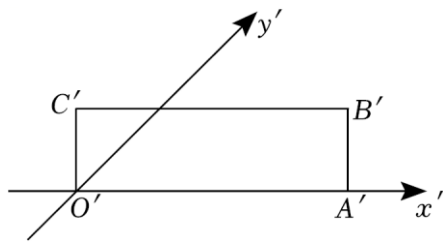
C. $\frac{a}{b}$ 的取值范围为 $(\sqrt{2}, 2)$

D. $\frac{1}{\tan B} - \frac{1}{\tan A} + 2 \sin A$ 的取值范围为 $(\frac{5\sqrt{3}}{3}, 3)$

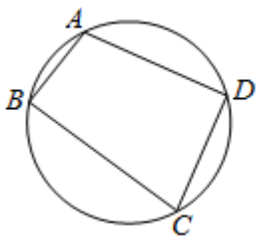
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 定义一种运算如下： $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$ ，则复数 $\begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 2 & 3i \end{bmatrix}$ 的共轭复数是_____.

14. 如图，矩形 $O'A'B'C'$ 是水平放置的一个平面图形由斜二测画法得到的直观图，其中 $O'A' = 4$ ， $O'C' = 1$ ，则原图形周长是_____.



15. 今年年初新冠肺炎肆虐全球，抗击新冠肺炎的有效措施之一是早发现、早隔离。现某地发现疫情，卫生部门欲将一块如图所示的圆 O 的内接四边形区域 $ABCD$ ，沿着四边形边界用固定高度的板材围成一个封闭的隔离区。其中 $AB = 100$ ， $BC = 300$ ， $CD = DA = 200$ ，(单位：米)，则 $\angle A =$ _____；四边形 $ABCD$ 的面积为_____ (平方米)。



16. 对任意两个非零的平面向量 $\vec{\alpha}$ ， $\vec{\beta}$ ，定义 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 之间的新运算 $\vec{\alpha} \otimes \vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}}$ 。已知非零的平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足：

$\vec{a} \otimes \vec{b}$ 和 $\vec{b} \otimes \vec{a}$ 都在集合 $\{x | x = \frac{\sqrt{3}n}{3}, n \in \mathbb{Z}\}$ 中，且 $|\vec{a}| \geq |\vec{b}|$ 。设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ ，则

$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \sin \theta =$ _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题 10 分) 已知平面向量 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (2x-1, -x)$ ($x \in \mathbb{Z}$)

(1) 若 $2\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - 2\vec{b}$ 垂直, 求 x ;

(2) 若向量 $\vec{c} = (7, -1)$, 若 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{b} - \vec{c}$ 共线, 求 $|\vec{a} - \vec{b}|$.

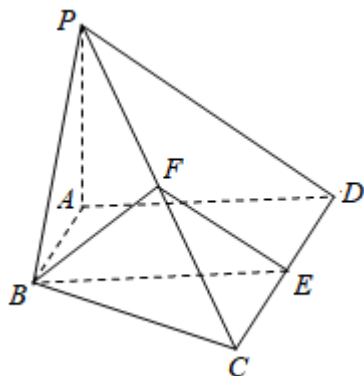
18. (本小题 10 分) 在① $\overline{z_2} z_2 = 10$ ($a > 0$); ② 复平面上表示 $\frac{z_1}{z_2}$ 的点在直线 $x + 2y = 0$ 上; ③ $z_1(a - i) > 0$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中的横线上, 并解答:

已知复数 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = a + 3i$ ($a \in \mathbb{R}$) (i 为虚数单位), 满足_____.

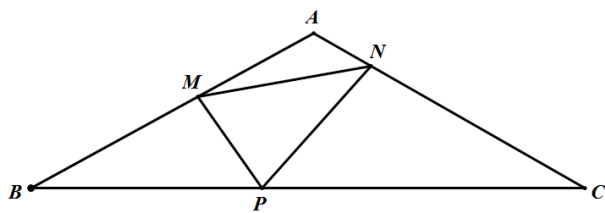
(1) 若 $z = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$, 求复数 z 以及 $|z|$;

(2) 若 z_2 是实系数一元二次方程 $x^2 + mx + 4 - 3m = 0$ 的根, 求实数 m 的值.

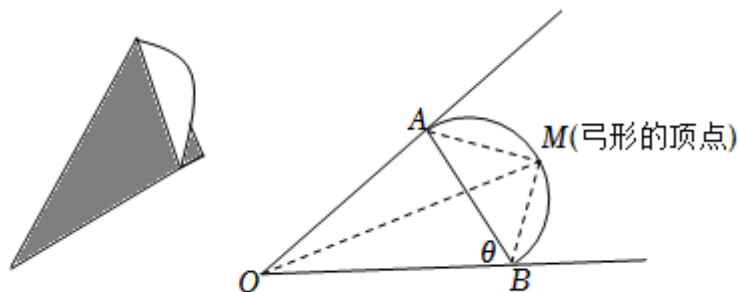
19. (本小题 12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $CD = 2AB$, $AB \perp AD$, E , F 分别是 CD 和 PC 的中点,
- (1) 证明: $AB \perp PD$;
- (2) 证明: 平面 $BEF \parallel$ 平面 PAD .



20. (本小题 12 分) 某农场有一块底角为 30° 的等腰三角形的空地 ABC , 其中边 BC 的长度为 400 米, 为迎接“五一”观光游, 欲在边界 BC 上选择一点 P , 修建观赏小径 PM , PN , 其中 M , N 分别在边界 AB , AC 上, 小径 PM , PN 与边界 BC 的夹角都是 60° , 区域 PMB 和区域 PNC 内种植郁金香, 区域 $AMPN$ 内种植月季花.
- (1) 探究“观赏小径 PM , PN 的长度之和是否为定值? 请说明理由
- (2) 为深度体验观赏, 准备在月季花区域内修建小径 MN , 当点 P 在何处时, 三条小径 (PM , PN , MN) 的长度之和最小? 并求出最小值.



21. (本小题 12 分) 重庆、武汉、南京并称为三大“火炉”城市，而重庆比武汉、南京更厉害，堪称三大“火炉”之首。某人在歌乐山修建了一座避暑山庄 O (如图)。为吸引游客，准备在门前两条夹角为 $\frac{\pi}{6}$ (即 $\angle AOB$) 的小路之间修建一处弓形花园，使之有着类似“冰淇淋”般的凉爽感，已知弓形花园的弦长 $|AB| = 2\sqrt{3}$ 且点 A, B 落在小路上，记弓形花园的顶点为 M ， $\angle MAB = \angle MBA = \frac{\pi}{6}$ ，设 $\angle OBA = \theta$ 。



“冰淇淋”设计图

- (1) 将 OA, OB 用含有 θ 的关系式表示出来；
- (2) 该山庄准备在 M 点处修建喷泉，为获取更好的观景视野，如何规划花园 (即 OA, OB 长度)，才使得喷泉 M 与山庄 O 距离即 $|OM|$ 值最大？

22. (本小题 14 分) 类比于二维平面中的余弦定理，有三维空间中的三面角余弦定理：

如图 1，由射线 PA, PB, PC 构成的三面角 $P-ABC$ ， $\angle APC = \alpha$ ， $\angle BPC = \beta$ ， $\angle APB = \gamma$ ，二面角 $A-PC-B$ 的大小为 θ ，则 $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \theta$ 。

- (1) 当 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时，证明以上三面角余弦定理；
- (2) 如图 2，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\angle A_1AC = 60^\circ$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ，
 - ① 求 $\angle A_1AB$ 的余弦值；
 - ② 在直线 CC_1 上是否存在点 P ，使 $BP \parallel$ 平面 DA_1C_1 ？若存在，求出点 P 的位置；若不存在，说明理由。

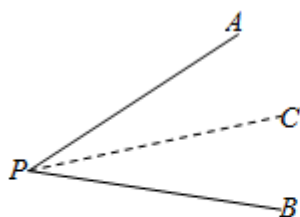


图1

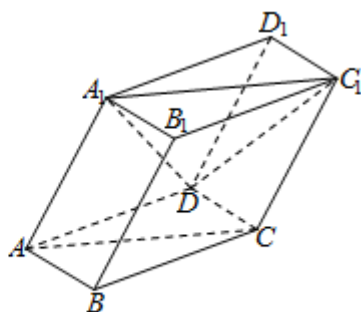


图2

