无锡市辅仁高级中学2022-2023学年度第二学期期末考试

高一数学试卷

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．若$z(1-\mathrm{i})=(1+\mathrm{i})^2$，则在复平面内复数$z$对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2．两个粒子A，B从同一发射源发射出来，在某一时刻，它们的位移分别为$\overrightarrow{s_A}=(4,3)$，$\overrightarrow{s_B}=(-2,6)$，则$\overrightarrow{s_B}$在$\overrightarrow{s_A}$上的投影向量的长度为（　　）

A．10　　B．$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　D．2

3.若一个样本容量为8的样本的平均数为5，方差为2．现样本中又加入一个新数据5，此时样本容量为9，平均数为$\bar{x}$，方差为s^2，则（　　）

A. $\bar{x}=5$，$s^2>2$　　B. $\bar{x}=5$，$s^2<2$　　C. $\bar{x}>5$，$s^2<2$　　D. $\bar{x}>5$，$s^2>2$

4．抛掷两枚质地均匀的硬币，设事件A=“第一枚硬币正面朝上”，事件B=“第二枚硬币正面朝上”.下列结论正确的是（　　）

A．A与B互为对立事件　　B．A与B互斥　　C．A与B相等　　D．$P(A)=P(B)$

5．四棱台$ABCD-EFGH$中，其上、下底面均为正方形，若$EF=2AB=8$，且每条侧棱与底面所成角的正切值均为$3\sqrt{2}$，则该棱台的体积为（　　）

A．224　　B．448　　C．$\dfrac{224}{3}$　　D．147

6．在△ABC中，点D为BC边的中点，O为线段AD的中点，连接CO并延长交AB于点E，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{CE}=$（　　）

A．$\dfrac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$　　B．$\dfrac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}$　　C．$\dfrac{1}{4}\vec{a}-\dfrac{3}{4}\vec{b}$　　D．$\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{3}{4}\vec{b}$

7．在△ABC中，CD为角C的平分线，若$B=2A$，$3AD=4BD$，则$\cos A$等于（　　）

A．0　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{3}{4}$

8．中国古建筑闻名于世，源远流长．如图1所示

图1

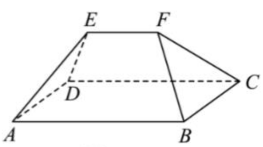


图2

的五脊殿是中国传统建筑中的一种屋顶形式，该屋顶的结构示意图如图 2 所示，在结构示意图中，已知四边形 $ABCD$ 为矩形，$EF \parallel AB$，$AB=2EF=2$，$\triangle ADE$ 与 $\triangle BCF$ 都是边长为 1 的等边三角形，若点 A，B，C，D，E，F 都在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为（　）

A．$\frac{11\pi}{8}$　　B．$\frac{11\pi}{6}$　　C．$\frac{11\pi}{4}$　　D．$\frac{11\pi}{2}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知复数 z_1,z_2，$\overline{z_1}$ 为 z_1 的共轭复数，则下列结论中一定成立的是（　）

A．$z_1+\overline{z_1}$ 为实数

B．若 $|z_1|=|z_2|$，则 $z_1=\pm z_2$

C．$|z_2\overline{z_1}|=|z_2z_1|$

D．若 $|z_1|=1$，则 $|z_1+1-\mathrm{i}|$ 的最小值为 $\sqrt{2}-1$

10.下列说法正确的是（　　）

A．用简单随机抽样的方法从含有 50 个个体的总体中抽取一个容量为 5 的样本，则个体 m 被抽到的概率是 0.1

B．已知一组数据 1，2，3，3，4，5 的众数大于中位数

C．数据 27，12，14，30，15，17，19，23 的第 70 百分位数是 21

D．甲乙丙三种个体按 3:1:2 的比例分层抽样，如果抽取的甲个体数为 9，则样本容量为 18

11．在$\triangle ABC$ 中，内角 A、B、C 所对的边分别为，则下列说法正确的是（　）

A．$a=b\cos C+c\cos B$

B．若 $\sin 2A=\sin 2B$，则$\triangle ABC$ 是等腰三角形

C．若 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，且 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，则$\triangle ABC$ 为等边三角形

D．若 $a=2\sqrt{3},b=4$，要使满足条件的三角形有且只有两个，则 $A\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$

12．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，点 E,F,G,M 分别是 BC,AA_1,C_1D_1,BB_1 的中点则（　）

A．直线 A_1G,EF 是异面直线

B．平面 DMC_1 截正方体所得截面的面积为 $12\sqrt{2}$

C．三棱锥 $A-MC_1D_1$ 的体积为 $\frac{16}{3}$

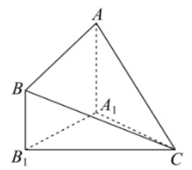
D．三棱锥 A_1-BDC_1 的内切球的体积为 $\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

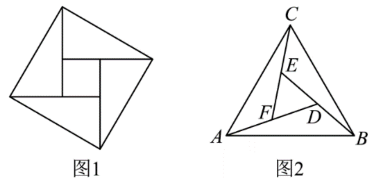
13.圆锥侧面展开图扇形的圆心角为 60°，底面圆的半径为 6，则圆锥的侧面积为______.

14.某种饮料每箱装 6 听，其中有 1 听不合格，质检人员从中随机抽出 2 听，检测出不合格品的概率为______.

15.神舟十三号飞船于 2022 年 4 月 16 日首次实施快速返回技术成功着陆. 若由搜救地面指挥中心的提供信息可知：在东风着陆场搜索区域内，A 处的返回舱垂直返回地面. 空中分队和地面分队分别在 B 处和 C 处，如图为其示意图，若 A，B，C 在同一水平面上的投影分别为 A_1，B_1，C，且在 C 点测得 B 的仰角为 26.6°，在 C 点测得 A 的仰角为 45°，在 B 点测得 A 的仰角为 26.6°，$BB_1=7\text{km}$，$\angle B_1A_1C=120^\circ$. 则 CA_1 的长为__________ km（参考数据：$\tan 26.6^\circ \approx \frac{1}{2}$）



第 15 题图



第 16 题图

16.大约在公元 222 年，赵爽为《周髀算经》一书作序时介绍了“勾股圆方图”，亦称“赵爽弦图”（如图 1）. 某数学兴趣小组类比“赵爽弦图”构造出图 2：$\triangle ABC$ 为正三角形，AD，BE，CF 围成的 $\triangle DEF$ 也为正三角形. 若 D 为 BE 的中点，①$\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为___________；②设 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+\mu=$___________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.已知复数 $z_1=a+\mathrm{i}$，$z_2=1-a\mathrm{i}$，其中 i 是虚数单位，$a\in\mathbf{R}$.

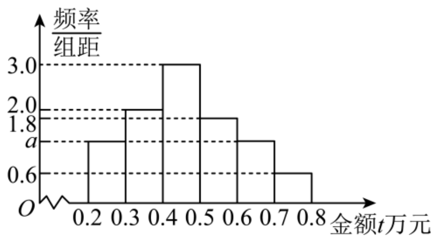
(1)若 $z_1\cdot z_2$ 为纯虚数，求 a 的值；

(2)若 $z_1^2+2z_1+2=0$，求 $\frac{z_1}{z_2}$ 的虚部.

18.某大型连锁超市随机抽取了 100 位客户，对去年到该超市消费情况进行调查.经统计，这 100 位客户去年到该超市消费金额（单位：万元）均在区间 $[0.2,0.8]$ 内，按 $[0.2,0.3],(0.3,0.4],(0.4,0.5],(0.5,0.6],(0.6,0.7],(0.7,0.8]$ 分成 6 组，其频率分布直方图如图所示.

(1)求频率分布直方图中 a 的值，并估计样本中消费金额的中位数(中位数精确到 0.01)；

(2)求出这 100 位客户最近一年到该超市消费金额的平均数 (同一组中的数据以这组数据所在范围的组中值作代表).



19. 甲、乙两人进行摸球游戏，游戏规则是：在一个不透明的盒子中装有质地、大小完全相同且编号分别为 1，2，3，4，5 的 5 个球，甲先随机摸出一个球，记下编号，设编号为

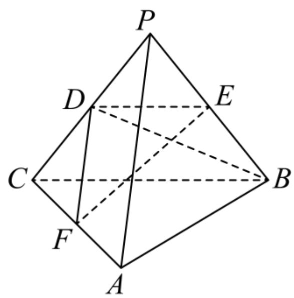
a，放回后乙再随机摸出一个球，也记下编号，设编号为 b，记录摸球结果 (a,b)，如果 $a+b>5$，算甲赢，否则算乙赢.
(1)求 $a+b=5$ 的概率；
(2)这种游戏规则公平吗？请说明理由

20.已知向量 $\vec{a}=(1,1)$， $\vec{b}=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

(1)求向量 $\vec{b}$ 和 $\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角的余弦值；

(2)设向量 $\vec{x}=\vec{a}+\left(t^2-3\right)\vec{b}$ ， $\vec{y}=-k\vec{a}+\left(t+2\right)\vec{b}$ ，是否存在正实数 k，使得 $\vec{x}\perp\vec{y}$ ？如果存在，求出 t 的取值范围；如果不存在，请说明理由.

21.如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PBC\perp$ 平面 ABC ， $\triangle PBC$ 为等边三角形，D，E 分别为 PC ， PB 的中点， $BD\perp PA$ ， $BC=2$ ， $AC=1$.
(1)求证： $AC\perp$ 平面 PBC ；
(2)在线段 AC 上是否存在点 F，使得平面 DEF 与平面 ABC 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，若存在，求出 CF 的长；若不存在，请说明理由.



22.记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}$.

(1)若 $C=\frac{\pi}{4}$，求 A，B;

(2)若△ABC 为锐角三角形，求 $\frac{a}{b\cos^2 B}$ 的取值范围.

无锡市辅仁高级中学 2022-2023 学年度第二学期期末考试

高一数学试卷参考答案

1．若$z\left(1-\mathrm{i}\right)=\left(1+\mathrm{i}\right)^2$，则在复平面内复数$z$对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】B

【分析】首先化简得到$z=-1+\mathrm{i}$，再求$|z|$即可.

【详解】因为$z\left(1-\mathrm{i}\right)=\left(1+\mathrm{i}\right)^2$，所以$z=\dfrac{\left(1+\mathrm{i}\right)^2}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}\left(1+\mathrm{i}\right)}{\left(1+\mathrm{i}\right)\left(1-\mathrm{i}\right)}=-1+\mathrm{i}$

故选：B

2．两个粒子A，B从同一发射源发射出来，在某一时刻，它们的位移分别为$\overrightarrow{s_A}=\left(4,3\right)$，$\overrightarrow{s_B}=\left(-2,6\right)$，则$\overrightarrow{s_B}$在$\overrightarrow{s_A}$上的投影向量的长度为（　　）

A．10　　B．$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　D．2

【答案】D

【分析】先求得$\overrightarrow{s_B}$与$\overrightarrow{s_A}$夹角的余弦值，再根据投影向量的定义求出$\overrightarrow{s_B}$在$\overrightarrow{s_A}$上的投影向量，即可求解.

【详解】设$\overrightarrow{s_B}$与$\overrightarrow{s_A}$的夹角为θ，

则$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{s_B}\cdot\overrightarrow{s_A}}{\left|\overrightarrow{s_B}\right|\cdot\left|\overrightarrow{s_A}\right|}=\dfrac{10}{5\times2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

所以$\overrightarrow{s_B}$在$\overrightarrow{s_A}$上的投影向量为$\left|\overrightarrow{s_B}\right|\cos\theta\cdot\dfrac{\overrightarrow{s_A}}{s_A}=2\sqrt{10}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}\cdot\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)=(\dfrac{8}{5},\dfrac{6}{5})$，

所以$\overrightarrow{s_B}$在$\overrightarrow{s_A}$上的投影向量的长度为$\sqrt{\dfrac{64}{25}+\dfrac{36}{25}}=2$，

故选:D.

3.若一个样本容量为 8 的样本的平均数为 5，方差为 2．现样本中又加入一个新数据 5，此时样本容量为 9，平均数为 $\overline{x}$，方差为 s^2，则 （　　）

A. $\overline{x}=5$，$s^2>2$　　B. $\overline{x}=5$，$s^2<2$　　C. $\overline{x}>5$，$s^2<2$　　D. $\overline{x}>5$，$s^2>2$

【答案】B

4．抛掷两枚质地均匀的硬币，设事件 A=“第一枚硬币正面朝上”，事件 B=“第二枚硬币正面朝上”.下列结论正确的是（　　）

A．A 与 B 互为对立事件　　B．A 与 B 互斥

C．A 与 B 相等　　D．$P(A)=P(B)$

【答案】D

【分析】先把抛掷两枚质地均匀的硬币的所有可能结果都罗列出来，然后再把事件 A 和事件 B 包含的可能结果找出来，然后根据事件对立、互斥、相等的定义即可判断 ABC 选项；对于 D 选项，只要根据古典概型的概率计算公式计算出事件 A 和事件 B 的概率即可判断.

【详解】抛掷两枚质地均匀的硬币的所有可能结果有：（正，正），（正，反），（反，正），（反，反）4 种结果，

事件 A 包含的结果有：（正，正），（正，反）2 种，事件 B 包含的结果有：（正，正），（反，正）2 种，

显然事件 A 和事件 B 都包含（正，正）这一结果，即事件 A 和事件 B 能同时发生，

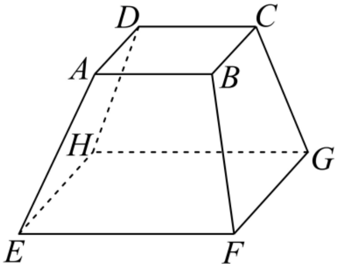
所以事件 A 和事件 B 既不对立也不互斥，故选项 A、B 错误；

事件 A 和事件 B 中有不同的结果，所以事件 A 和事件 B 不相等，故选项 C 错误；

由古典概型得 $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,所以 $P(A)=P(B)$,故选项 D 正确；

故选：D.

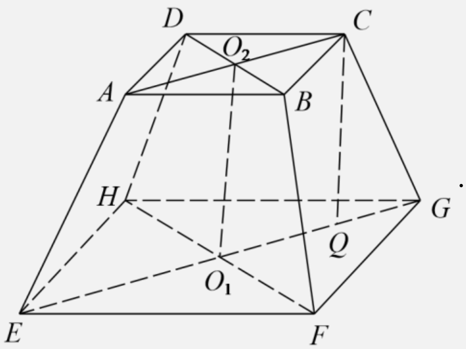
5．四棱台 $ABCD-EFGH$ 中，其上、下底面均为正方形，若 $EF=2AB=8$，且每条侧棱与底面所成角的正切值均为 $3\sqrt{2}$，则该棱台的体积为（　　）



A．224　　　　　　B．448　　　　　　C．$\dfrac{224}{3}$　　　　　　D．147

【答案】B

【详解】连接 HF，EG 交于点 O_1，连接 AC，DB 交于点 O_2，连接 O_1O_2，过 C 作 $CQ//O_1O_2$，如图，



因为“刍童” $ABCD-EFGH$ 上、下底面均为正方形，且每条侧棱与底面所成角的正切值均相等，

所以 $O_1O_2\perp$ 底面 $EFGH$， 又 $CQ//O_1O_2$， 所以 $CQ\perp$ 底面 $EFGH$，

所以 $\angle CGQ$ 是“刍童” $ABCD-EFGH$ 其中一条侧棱与底面所成角的平面角，则 $\tan\angle CGQ=3\sqrt{2}$，

因为 $EF=2AB=8$，所以 $EG=8\sqrt{2}, AC=4\sqrt{2}$，

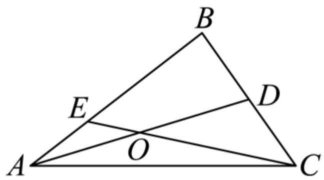
易知四边形 $ACGE$ 是等腰梯形，则 $QG=\dfrac{1}{2}\left(EG-AC\right)=2\sqrt{2}$，

所以在 Rt□CQG 中，$\tan\angle CGQ=\dfrac{CQ}{QG}=3\sqrt{2}$，则 $CQ=3\sqrt{2}QG=12$，即“刍童” $ABCD-EFGH$ 的高为 12，

则该刍童的体积$V=\frac{12\times\left[(2\times4+8)\times4+(2\times8+4)\times8\right]}{6}=448$.

故选：B.

6．如图，在△ABC中，点D为BC边的中点，O为线段AD的中点，连接CO并延长交AB于点E，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{CE}=$（　）



A．$\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$　　B．$\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}$

C．$\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$　　D．$\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$

【答案】A

【分析】设$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}$，再根据平面向量基本定理分别表示$\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CE}$，进而根据向量共线设$\overrightarrow{CE}=\mu\overrightarrow{CO}$，代入向量可得$\begin{cases}\lambda=\frac{1}{3}\\ \mu=\frac{4}{3}\end{cases}$，进而得到$\overrightarrow{CE}$.

【详解】设$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}$，则$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=\lambda\vec{a}-\vec{b}$，又

$\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$，

设$\overrightarrow{CE}=\mu\overrightarrow{CO}$，则$\lambda\vec{a}-\vec{b}=\mu\left(\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}\right)$，

故$\begin{cases}\lambda=\frac{\mu}{4}\\ -1=-\frac{3\mu}{4}\end{cases}$，即$\begin{cases}\lambda=\frac{1}{3}\\ \mu=\frac{4}{3}\end{cases}$，

故$\overrightarrow{CE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CO}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$.

故选：A

7．在□ABC中，CD为角C的平分线，若$B=2A$，$3AD=4BD$，则$\cos A$等于（　）

A．0　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

【答案】C

【分析】由CD为角C的平分线，$3AD=4BD$，可得$\frac{AC}{BC}=\frac{4}{3}$，设$AC=4x$，$BC=3x$，然后在$\triangle ABC$中利用正弦定理可得$\frac{4x}{2\sin A\cos A}=\frac{3x}{\sin A}$，化简计算可得答案

【详解】因为CD为角C的平分线，所以$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$

因为$3AD=4BD$，所以$\frac{AC}{BC}=\frac{4}{3}$

所以不妨设$AC=4x$，$BC=3x$

因为在$\triangle ABC$中，$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$，$B=2A$

所以$\frac{AC}{\sin 2A}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow\frac{4x}{2\sin A\cos A}=\frac{3x}{\sin A}$

因为在$\triangle ABC$中，$\sin A\neq 0$，$x\neq 0$

所以$\frac{4x}{2\sin A\cos A}=\frac{3x}{\sin A}\Rightarrow\frac{4}{2\cos A}=3$

所以$\cos A=\frac{2}{3}$.

故选：C

8．中国古建筑闻名于世，源远流长．如图1所示的五脊殿是中国传统建筑中的一种屋顶形式，该屋顶的结构示意图如图2所示，在结构示意图中，已知四边形$ABCD$为矩形，$EF\,//\,AB$，$AB=2EF=2$，$\triangle ADE$与$\triangle BCF$都是边长为1的等边三角形，若点A，B，C，D，E，F都在球O的球面上，则球O的表面积为（　　）


图1

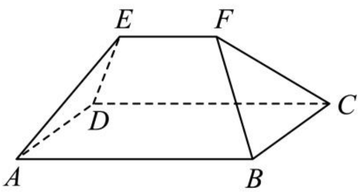


图2

A．$\frac{11\pi}{8}$　　B．$\frac{11\pi}{6}$　　C．$\frac{11\pi}{4}$　　D．$\frac{11\pi}{2}$

【答案】D

【分析】如图，根据球的性质可得$OO_1\perp$平面$ABCD$，根据中位线的性质和勾股定理可得$MO_1\perp PQ$且$MO_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，分类讨论当O在线段O_1M上和O在线段MO_1的延长线上时2种情况，结合球的性质和表面积公式计算即可求解.

【详解】如图，连接AC，BD，设$AC\cap BD=O_1$，

因为四边形$ABCD$为矩形，所以O_1为矩形$ABCD$外接圆的圆心．连接OO_1，

则$OO_1\perp$平面$ABCD$，分别取EF，AD，BC的中点M，P，Q，

根据几何体$ABCDEF$的对称性可知，直线OO_1交EF于点M.

连接PQ，则$PQ//AB$，且O_1为PQ的中点，因为$EF//AB$，所以$PQ//EF$，

连接EP，FQ，在$\vee ADE$与$\triangle BCF$中，易知$EP=FQ=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以梯形$EFQP$为等腰梯形，所以$MO_1\perp PQ$，且$MO_1=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{2-1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

设$OO_1=m$，球O的半径为R，连接OE，OA，

当O在线段O_1M上时，由球的性质可知$R^2=OE^2=OA^2$，

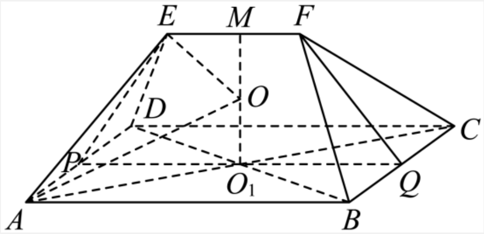
易得$O_1A=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，则$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-m\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+m^2$，此时无解.

当O在线段MO_1的延长线上时，由球的性质可知，

$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+m^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+m\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$，解得$m=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以$R^2=OE^2=\frac{11}{8}$，

所以球O的表面积$S=4\pi R^2=\frac{11\pi}{2}$，

故选：D.



【点睛】求解外接球问题的关键在于确定球心的位置，而确定球心位置的依据一是球心到球面上各点的距离都等于球的半径，二是球心与截面圆圆心的连线垂直于截面．由此出发，利用一些特殊模型，或借助一般方法，即可确定外接球球心的位置．

9．（多选）已知复数z_1,z_2，$\overline{z_1}$为z_1的共轭复数，则下列结论中一定成立的是（　）

A．$z_1+\overline{z_1}$为实数

B．若$|z_1|=|z_2|$，则$z_1=\pm z_2$

C．$|z_2\overline{z_1}|=|z_2z_1|$

D．若$|z_1|=1$，则$|z_1+1-\mathrm{i}|$的最小值为$\sqrt{2}-1$

【答案】ACD

【分析】设$z_1=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathrm{R})$，计算$z_1+\overline{z_1}$可判断 A；用特值法可判断 B；设$z_1=x+y\mathrm{i},z_2=a+b\mathrm{i}(x,y,a,b\in\mathrm{R})$，计算$|z_2\overline{z_1}|,|z_2z_1|$可判断 C；由$|z_1|=1$，设$z_1=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，得出$|z_1+1-\mathrm{i}|$的表达式并化简，利用三角函数性质求得最小值，即可判断 D.

【详解】选项 A：设$z_1=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathrm{R})$，$\overline{z_1}=x-y\mathrm{i}$，$\therefore z_1+\overline{z_1}=2x\in\mathrm{R}$，故 A 正确；

选项 B：设$z_1=3+4\mathrm{i},z_2=5$，$|z_1|=|z_2|=5$，但是$z_1\neq\pm z_2$，故 B 错误；

选项 C：设$z_1=x+y\mathrm{i},z_2=a+b\mathrm{i}(x,y,a,b\in\mathrm{R})$，则

$z_2\overline{z_1}=(a+b\mathrm{i})(x-y\mathrm{i})=(ax+by)+(bx-ay)\mathrm{i}$，

$|z_2\overline{z_1}|=\sqrt{(ax+by)^2+(bx-ay)^2}=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(a^2+b^2\right)}$

$z_2z_1=(a+b\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=(ax-by)+(bx+ay)\mathrm{i}$，

$|z_2z_1|=\sqrt{(ax-by)^2+(bx+ay)^2}=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(a^2+b^2\right)}$，

所以$\left|z_2\overline{z_1}\right|=\left|z_2 z_1\right|$，故 C 正确；

选项 D：若$\left|z_1\right|=1$，设$z_1=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，则$z_1+1-\mathrm{i}=\left(\cos\theta+1\right)+\left(\sin\theta-1\right)\mathrm{i}$，

则$\left|z_1+1-\mathrm{i}\right|=\sqrt{\left(\cos\theta+1\right)^2+\left(\sin\theta-1\right)^2}=\sqrt{3+2\left(\cos\theta-\sin\theta\right)}=\sqrt{3+2\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$，

所以当$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1$时，$\left|z_1+1-\mathrm{i}\right|$取最小值$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$，故 D 正确.

故选：ACD.

10.（多选）下列说法正确的是（　　）

A．用简单随机抽样的方法从含有 50 个个体的总体中抽取一个容量为 5 的样本，则个体m被抽到的概率是 0.1

B．已知一组数据 1，2，3，3，4，5 的众数大于中位数

C．数据 27，12，14，30，15，17，19，23 的第 70 百分位数是 21

D．甲乙丙三种个体按 3:1:2 的比例分层抽样调查，如果抽取的甲个体数为 9，则样本容量为 18

【答案】AD

【分析】分别利用古典概型的计算公式，方差和标准差的计算公式及其百分位数的定义求解即可.

【详解】对于选项A，个体m被抽到的概率为$\frac{5}{50}=0.1$，故该选项正确；

对于选项B，$\frac{1+2+m+6+7}{5}=4$，解得$m=4$，

则方差为$S^2=\frac{1}{5}\left[\left(1-4\right)^2+\left(2-4\right)^2+\left(4-4\right)^2+\left(6-4\right)^2+\left(7-4\right)^2\right]=5.2$，故该选项错误；

对于选项C，数据 27，12，14，30，14，17，19，23 从小到大排列为，12，14，14，17，19，23，27，30，

由于$8\times70\%=5.6$，其中第 6 个数为 23，故该选项错误；

故选：AD.

11．(多选)在□ABC中，内角A、B、C所对的边分别为，则下列说法正确的是（　　）

A．$a=b\cos C+c\cos B$

B．若$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，且$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，则□$ABC$为等边三角形

C．若$\sin 2A=\sin 2B$，则□ABC是等腰三角形

D．若$a=2\sqrt{3},b=4$，要使满足条件的三角形有且只有两个，则$A\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$

【答案】ABD

【分析】对于选项A，用正弦定理变形化简即可判断；对于选项B，由向量垂直的性质可得到三角形是等腰三角形，再由数量积公式算出$\angle A=\frac{\pi}{3}$，即可判断；对于选项C，由三角形方程在三角形内有两个解即可判断；对于选项D，由满足条件的三角形有且只有两个得到$b\sin A<a<b$，即可求出$\angle A$的取值范围.

【详解】对于选项A，由正弦定理得，

$b\cos C+c\cos B=2R\sin B\cos C+2R\sin C\cos B$

$=2R\sin\left(B+C\right)=2R\sin A=a$，

故选项A正确.

对于选项B，因为$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$、$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$分别为单位向量，

所以$\angle A$的角平分线与BC垂直，所以$AB=AC$，所以$\angle B=\angle C$.

又因为$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，即$\cos A=\frac{1}{2}$，因为$0<A<\pi$，所以$\angle A=\frac{\pi}{3}$，

所以$\angle B=\angle C=\angle A=\frac{\pi}{3}$，所以□$ABC$为等边三角形，

故选项B正确.

对于选项C，在□ABC中，由$\sin 2A=\sin 2B$解得

$2A=2B$ 或 $2A=\pi-2B$，即 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$，

所以$\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形.

故选项 C 错误.

对于选项 D，要使满足条件的三角形有且只有两个，则

$b\sin A<a<b$，

因为 $a=2\sqrt{3},b=4$，所以 $4\sin A<2\sqrt{3}$

即 $\sin A<\frac{\sqrt{3}}{2},A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

所以 $0<A<\frac{\pi}{3}$.

故选项 D 正确.

故选：ABD

12.（多选）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，点 E,F,G,M 分别是 BC,AA_1,C_1D_1,BB_1 的中点，则（　）

A．直线 A_1G,EF 是异面直线

B．平面 DMC_1 截正方体所得截面的面积为 $12\sqrt{2}$

C．三棱锥 $A-MC_1D_1$ 的体积为 $\frac{16}{3}$

D．三棱锥 A_1-BDC_1 的内切球的体积为 $\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$

答案．ACD

【分析】对于 A，取 B_1C_1 的中点 P，连接 PE，取 PE 的中点 Q，连接 A_1Q，证明 $EF//A_1Q$，即可判断；对于 B，延长 C_1M,CB 交于点 H，连接 HD 交 AB 点 N，连接 MN,AB_1，说明平面 DMC_1 截正方体所得截面为四边形 $MNDC_1$，从而可以判断；对于 C，连接 BC_1,B_1C，证明 $B_1C\perp$平面 ABC_1D_1，再根据 $V_{A-MC_1D_1}=V_{M-AC_1D_1}$ 即可判断；对于 D，如图，以点 D 为原点建立空间直角坐标系，设 K 为 AM 的中点，O 为三棱锥 C_1-ABM 的外接球的球心，利用

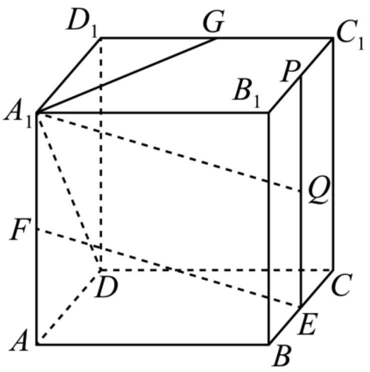
空间中两点的距离公式求出球心及半径即可判断.

【详解】对于 A，如图，取 B_1C_1 的中点 P，连接 PE，取 PE 的中点 Q，连接 A_1Q，

则 $A_1F//EQ, A_1F=EQ$，

所以四边形 A_1FEQ 是平行四边形，所以 $EF//A_1Q$，

又因 $A_1G\cap A_1Q=A_1$，所以直线 A_1G, EF 是异面直线，故 A 正确；



对于 B，如图，延长 C_1M, CB 交于点 H，连接 HD 交 AB 点 N，连接 MN, AB_1，

因为 $BB_1//CC_1, M$ 为 BB_1 的中点，则 $BM=\frac{1}{2}CC_1$，

所以 B 为 HC 的中点，

因为 $AB//CD$，所以 N 为 AB 的中点，则 $MN//AB_1$，

因为 $AD//B_1C_1, AD=B_1C_1$，

所以 AB_1C_1D 为平行四边形，所以 $AB_1//DC_1$，

所以 $MN//DC_1$，

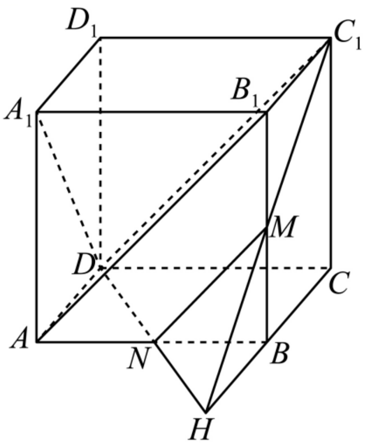
则平面 DMC_1 截正方体所得截面为等腰梯形 $MNDC_1$，

在等腰梯形 $MNDC_1$ 中，

$DC_1=4\sqrt{2}, MN=2\sqrt{2}, DN=MC_1=2\sqrt{5}$，

则梯形的高为 $\sqrt{20-2}=3\sqrt{2}$，

所以等腰梯形$MNDC_1$的面积为$\frac{\left(4\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)\times 3\sqrt{2}}{2}=18$，故 B 错误；



对于 C，连接BC_1,B_1C，则$BC_1\perp B_1C$，

因为$AB\perp$平面BCC_1B_1，$B_1C\subset$平面BCC_1B_1，

所以$AB\perp B_1C$，

又$AB\cap BC_1=B,AB,BC_1\subset$平面$ABC_1D_1$，所以$B_1C\perp$平面$ABC_1D_1$，

又因为M为BB_1的中点，

所以三棱锥$M-AC_1D_1$的高为$\frac{1}{4}B_1C=\sqrt{2}$，

$S_{\triangle AC_1D_1}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 4=8\sqrt{2}$，

所以$V_{A-MC_1D_1}=V_{M-AC_1D_1}=\frac{1}{3}\times 8\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{16}{3}$，故 C 正确；

13.圆锥侧面展开图扇形的圆心角为 60°，底面圆的半径为 6，则圆锥的侧面积为______.

【答案】216π

【分析】运用扇形的弧长公式以及圆锥的侧面积公式计算即可求解.

【详解】设圆锥的底面周长为c，母线长为l，则$c=2\pi\times 6=12\pi$，

因为圆锥侧面展开图扇形的圆心角为$60°$，

所以$\frac{\pi}{3}=\frac{c}{l}=\frac{12\pi}{l}$，解得$l=36$，

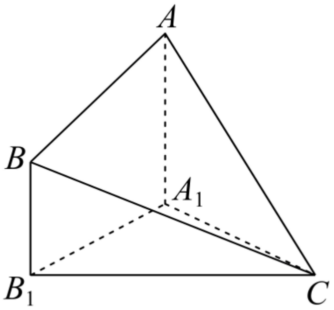
则圆锥的侧面积为$\frac{1}{2}lc=\frac{1}{2}\times 36\times 12\pi=216\pi$，

故答案为：216π.

14.某种饮料每箱装 6 听，其中有 1 听不合格，质检人员从中随机抽出 2 听，检测出不合格品的概率为______.

【答案】$\frac{1}{3}$

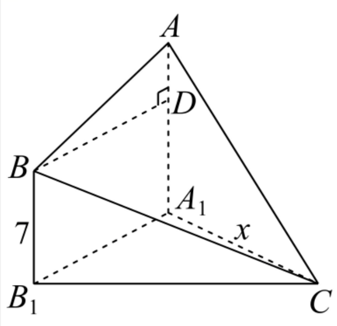
15.神舟十三号飞船于2022年4月16日首次实施快速返回技术成功着陆·若由搜救地面指挥中心的提供信息可知：在东风着陆场搜索区域内，A 处的返回舱垂直返回地面·空中分队和地面分队分别在B处和C处，如图为其示意图，若A，B，C在同一水平面上的投影分别为A_1，B_1，C，且在C点测得B的仰角为26.6°，在C点测得A 的仰角为45°，在B点测得A 的仰角为26.6°，$BB_1=7\text{km}$，$\angle B_1A_1C=120^{\circ}$.则$CA_1$的长为__________ km（参考数据：$\tan 26.6^{\circ}\approx\frac{1}{2}$）



【答案】10

【分析】设$A_1C=x\ \text{km}$，过点B作AA_1的垂线，垂足为D，则由题意可表示出B_1A_1,B_1C，然后在$\triangle A_1B_1C$中利用余弦定理列方程可求得结果

【详解】解：如图：



设 $A_1C=x\,\mathrm{km}$，过点 B 作 AA_1 的垂线，垂足为 D，

由题意得 $\angle BCB_1=26.6°,\angle ACA_1=45°,\angle ABD=26.6°$，则 $AA_1=x$，

因为 $AA_1\perp$ 平面 A_1B_1C，$BB_1\perp$ 平面 A_1B_1C，

所以 $AA_1 \parallel BB_1$，

因为 $A_1C,A_1B_1\subset$ 平面 A_1B_1C，

所以 $AA_1\perp A_1C,AA_1\perp A_1B_1$，

因为 $AA_1\perp BD$，

所以 $BD \parallel A_1B_1$，

所以四边形 A_1B_1BD 为平行四边形，

所以 $A_1D=BB_1=7$，

所以 $AD=AA_1-A_1D=x-7$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$BD=\dfrac{AD}{\tan\angle ABD}=\dfrac{x-7}{\tan 26.6°}\approx\dfrac{x-7}{\frac{1}{2}}=2(x-7)$

所以 $B_1A_1=BD=2\left(x-7\right)$，

因为 $BB_1\perp$ 平面 A_1B_1C，$B_1C\subset$ 平面 A_1B_1C，所以 $BB_1\perp B_1C$，

所以 $B_1C=\dfrac{BB_1}{\tan\angle BCB_1}=\dfrac{7}{\tan 26.6°}\approx\dfrac{7}{\frac{1}{2}}=14$，

在$\triangle A_1B_1C$中，$\angle B_1A_1C=120°$，

由余弦定理得：$\cos120°=\dfrac{A_1B_1^{\ 2}+A_1C^2-B_1C^2}{2A_1B_1\cdot A_1C}=\dfrac{\left[2\left(x-7\right)\right]^2+x^2-14^2}{2\times2\left(x-7\right)x}=-\dfrac{1}{2}$，

整理得$x^2-10x=0$

解得$x=10$或$x=0$（舍去）.

所以CA_1的长为10km.

故答案为：10

16.大约在公元222年，赵爽为《周髀算经》一书作序时介绍了“勾股圆方图”，亦称“赵爽弦图”（如图1）．某数学兴趣小组类比“赵爽弦图”构造出图2：$\triangle ABC$为正三角形，AD，BE，CF围成的$\triangle DEF$也为正三角形．若D为BE的中点，①$\triangle DEF$与$\triangle ABC$的面积比为___________；②设$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda+\mu=$___________.

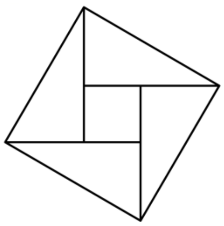


图1

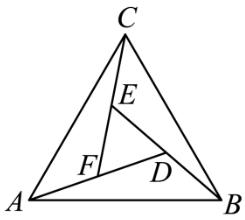


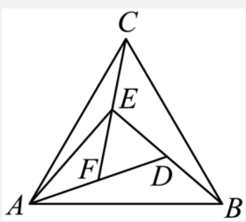
图2

【答案】　$\dfrac{1}{7}$　$\dfrac{6}{7}$

【分析】①根据类比图形的结构特点，找到$\triangle DEF$与$\triangle ABC$的面积联系即可.

②利用向量加减法的三角形法则，用$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$表示出$\overrightarrow{AD}$即可.

【详解】如图：



连接AE，由题意知$\triangle ABD\cong\triangle BCE\cong\triangle CAF$，且$D,E,F$分别为$BE,CF,AD$的中点，

$\triangle ABD\cong\triangle BCE\cong\triangle CAF$.

所以$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle AEF}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle AFC}$，

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AFC}+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCE}+S_{\triangle DEF}=7S_{\triangle DEF}$，

得$\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{7}$.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}\right)=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CF}\right)$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$，

化简得$\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AC}$，

所以$\lambda+\mu=\dfrac{4}{7}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{6}{7}$

故答案为：①$\dfrac{1}{7}$；②$\dfrac{6}{7}$.

17.已知复数$z_1=a+\mathrm{i}$，$z_2=1-a\mathrm{i}$，其中i是虚数单位，$a\in\mathbf{R}$.

(1)若$z_1\cdot z_2$为纯虚数，求a的值；

(2)若$z_1^2+2z_1+2=0$，求$\dfrac{z_1}{z_2}$的虚部.

【答案】(1)$a=0$；

(2)1.

【分析】（1）根据复数乘法和纯虚数的定义进行求解即可；

（2）根据复数乘法运算法则，结合虚数单位的性质、复数虚部定义进行求解即可.

【详解】（1）由题意得，$z_1\cdot z_2=\left(a+\mathrm{i}\right)\left(1-a\mathrm{i}\right)=2a+\left(1-a^2\right)\mathrm{i}$

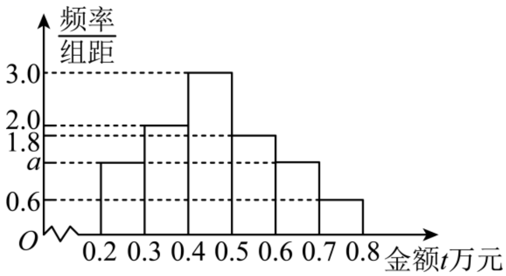
因为$z_1\cdot z_2$为纯虚数，所以$a=0$且$1-a^2\neq 0$，综上，$a=0$.

（2）因为$z_1=a+\mathrm{i}$，所以$\left(a+\mathrm{i}\right)^2+2\left(a+\mathrm{i}\right)+2=0$，即$\left(a+1\right)^2+2\left(a+1\right)\mathrm{i}=0$，

所以$a=-1$，所以$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-1+i}{1+i}=\frac{i^2+i}{1+i}=i$，

所以$\frac{z_1}{z_2}$的虚部为 1.

18．某大型连锁超市随机抽取了 100 位客户，对去年到该超市消费情况进行调查.经统计，这 100 位客户去年到该超市消费金额（单位：万元）均在区间$[0.2,0.8]$内，按$[0.2,0.3],(0.3,0.4],(0.4,0.5],(0.5,0.6],(0.6,0.7],(0.7,0.8]$分成 6 组，其频率分布直方图如图所示.



（1）求该频率分布直方图中a的值，并估计样本中评价分数的中位数（精确到 0. 01）；

（2）并求出这 100 位客户最近一年到该超市消费金额的平均数x（同一组中的数据以这组数据所在范围的组中值作代表）；

【答案】（1）$a=1.3$，0.46 万元；（2）0.466.

$2\times a\times0.1+2\times0.1+3\times0.1+1.8\times0.1+0.6\times0.1=1$（1）由题可知，

即$0.2a=0.26$，所以$a=1.3$.

令 50 百分位数为x，则$0.13+0.2+(x-0.4)\times3\approx0.46$

（2）由频率分布直方图可得

$\bar{x}=0.25\times0.13+0.35\times0.2+0.45\times0.3+0.55\times0.18+0.65\times0.13+0.75\times0.06=0.466$

因此，这 100 位客户最近一年到该超市消费金额的平均数为 0.466 万元.

19.甲、乙两人进行摸球游戏，游戏规则是：在一个不透明的盒子中装有质地、大小完全相同且编号分别为1，2，3，4，5的5个球，甲先随机摸出一个球，记下编号，设编号为a，放回后乙再随机摸出一个球，也记下编号，设编号为b，记录摸球结果(a,b)，如果$a+b>5$，算甲赢，否则算乙赢.

(1)求$a+b=5$的概率；

(2)这种游戏规则公平吗？请说明理由.

【答案】(1)$\frac{4}{25}$

(2)这种游戏规则不公平，理由详见解析

【分析】(1)列出摸球结果（a，b）全部可能的结果，再找出满足$a+b=5$的结果，最后根据古典概型的概率计算公式可得；

(2) 设甲赢为事件A，乙赢为事件B，则A，B为对立事件，再分别计算$P\left(A\right)$和$P(B)$，就可判断.

【详解】(1) 摸球结果（a，b）全部可能的结果是（1，1)，（1，2)，（1，3)，（1，4)，（1，5)，（2，1)，（2，2)，（2，3)，（2，4)，（2，5)，（3，1)，（3，2)，（3，3)，（3，4)，（3，5)，（4，1)，（4，2)，（4，3)，（4，4)，（4，5)，（5，1)，（5，2)，（5，3)，（5，4)，（5，5)，共25种，

其中$a+b=5$的结果为（1，4)，（2，3)，（3，2)，（4，1)，共4种，故由古典概型的概率计算公式可得$P\left(a+b=5\right)=\frac{4}{25}$；

（2）这种游戏规则不公平，理由如下：

设甲赢为事件A，乙赢为事件B，则A，B为对立事件，

由题意事件A包含的基本事件（1，5)，（2，4)，（2，5)，（3，3)，（3，4)，（3，5)，（4，2)，（4，3)，（4，4)，（4，5)，（5，1)，（5，2)，（5，3)，（5，4)，（5，5)，共15个，

由古典概型的概率计算公式可得$P\left(A\right)=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$，$\therefore P\left(B\right)=1-P\left(A\right)=\frac{2}{5}$，

$\because P\left(A\right)>P\left(B\right)$，故这种游戏规则不公平.

20．已知向量$\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$．

(1)求向量$\vec{b}$和$\vec{a}+\vec{b}$的夹角的余弦值；

(2)设向量$\vec{x}=\vec{a}+\left(t^2-3\right)\vec{b}$，$\vec{y}=-k\vec{a}+\left(t+2\right)\vec{b}$，是否存在正实数 k，使得$\vec{x}\perp\vec{y}$？如果存在，求出 t 的取值范围；如果不存在，请说明理由.

【详解】（1）$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=6$，

$\therefore\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{6}$，$\vec{b}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=4$

设向量$\vec{b}$和$\vec{a}+\vec{b}$的夹角为θ，

$$\cos\theta=\frac{\vec{b}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}+\vec{b}\right|}=\frac{4}{2\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

（2）假设存在正实数 t 和 k，使得$\vec{x}\perp\vec{y}$，则$\vec{x}\cdot\vec{y}=0$，

$$\Rightarrow\left[\vec{a}+\left(t^2-3\right)\vec{b}\right]\cdot\left[-k\vec{a}+\left(t+2\right)\vec{b}\right]$$

$$=-k\vec{a}^2+\left[t+2-k\left(t^2-3\right)\right]\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(t^2-3\right)\left(t+2\right)\cdot\vec{b}^2$$

$$=-2k+4\left(t+2\right)\left(t^2-3\right)=0$$

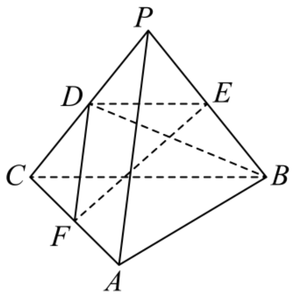
$\therefore k=2\left(t+2\right)\left(t^2-3\right)$

$\because k>0$，$\therefore 2\left(t+2\right)\left(t^2-3\right)>0$，

故$\begin{cases}t^2-3>0\\t+2>0\end{cases}$或$\begin{cases}t^2-3<0\\t+2<0\end{cases}$，

即存在且 t 的取值范围为$\left(-2,-\sqrt{3}\right)\cup(\sqrt{3},+\infty)$．

21.如图，在三棱锥$P-ABC$中，平面$PBC\perp$平面ABC，□PBC为等边三角形，D，E分别为PC，PB的中点，$BD\perp PA$，$BC=2$，$AC=1$.



(1)求证：$AC \perp$ 平面 PBC；

(2)在线段 AC 上是否存在点 F，使得平面 DEF 与平面 ABC 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，若存在，求出 CF 的长；若不存在，请说明理由.

【答案】(1)证明见解析

(2)存在，$CF=\frac{1}{2}$

【分析】(1)先证明 $BD \perp PC$，结合 $BD \perp PA$，由线面垂直判定定理和定义证明 $AC \perp BD$，取 BC 中点 G，由面面垂直性质定理证明 $PG \perp$ 平面 ABC，由此可得 $PG \perp AC$，最后利用线面垂直判定定理证明 $AC \perp$ 平面 PBC；

【详解】(1) ∵ □PBC 为等边三角形，D 为 PC 中点，

$\therefore BD \perp PC$，

又 $\because BD \perp PA$，$PA \cap PC = P$，PA，$PC \subset$ 平面 PAC，

$\therefore BD \perp$ 平面 PAC，

$\therefore AC \subset$ 平面 PAC，

$\therefore AC \perp BD$，

取 BC 中点 G，连接 PG，

∵ □PBC 为等边三角形，

$\therefore PG \perp BC$，

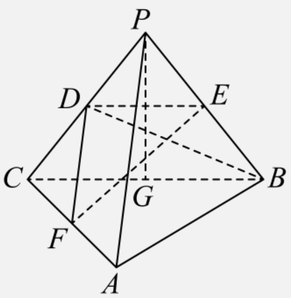
$\because$ 平面 $PBC \perp$ 平面 ABC，平面 $PBC \cap$ 平面 $ABC = BC$，$PG \subset$ 平面 PBC.

$\because$ $AC \subset$ 平面 ABC，

$\therefore$ $PG \perp AC$，

$\because$ BD 与 PG 相交， BD， $PG \subset$ 平面 PBC，

$\therefore$ $AC \perp$ 平面 PBC；



（2）以 C 为坐标原点，CA，CB 所在直线为 x 轴，y 轴，过 C 且与 GP 平行的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则

$C(0,0,0)$， $B(0,2,0)$， $P\left(0,1,\sqrt{3}\right)$， $D\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $E\left(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

设 $F(a,0,0)\ (0 \le a \le 1)$，则

$\overrightarrow{DE}=(0,1,0)$， $\overrightarrow{DF}=\left(a,-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

设平面 DEF 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}y=0\\ ax-\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$，

取 $x=\sqrt{3}$，可得 $\begin{cases}y=0\\ z=2a\end{cases}$，

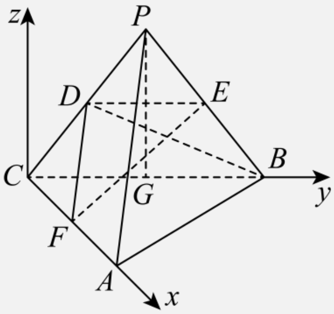
$\therefore$ $\vec{n}=\left(\sqrt{3},0,2a\right)$ 为平面 DEF 的一个法向量，

取平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$，

则 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{2a}{\sqrt{3+4a^2}}=\dfrac{1}{2}$，

解得 $a=\dfrac{1}{2}$，此时 $CF=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ 在线段 AC 上存在点 F 使得平面 DEF 与平面 ABC 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，且 $CF=\dfrac{1}{2}$.



22.记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\dfrac{a^2-b^2}{c^2}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{ab}$.

(1)若 $C=\dfrac{\pi}{4}$，求 A，B;

(2)若△ABC 为锐角三角形，求 $\dfrac{a}{b\cos^2 B}$ 的取值范围.

【答案】(1) $A=\dfrac{5\pi}{8},B=\dfrac{\pi}{8}$

(2) $\left(2,\dfrac{8}{3}\right)$

【分析】（1）由正弦定理、余弦定理结合两角和与差的正弦公式化简已知等式即可求出 $\sin(A-B)=1$，再结合 $A+B=\dfrac{3\pi}{4}$ 即可得出答案.

（2）由（1）知 $\sin 2C=\sin(A-B)$，分别讨论 $2C=A-B$ 或 $2C+A-B=\pi$，结合题意即可求出 $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{4}$，由正弦定理将 $\dfrac{a}{b\cos^2 B}$ 化简为 $\dfrac{\sin 3B}{\sin B\cos^2 B}=3-\tan^2 B$，代入即可求出答案.

（1）

因为 $\dfrac{a^2-b^2}{c^2}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{ab}=2\cos C$，

所以$\sin^2A-\sin^2B=2\sin^2C\cos C=\sin 2C\sin C=\sin\left(A+B\right)\sin\left(A-B\right)=\sin C\sin\left(A-B\right)$,

代入$C=\dfrac{\pi}{4}$，则$\sin\left(A-B\right)=1$，所以$A-B=\dfrac{\pi}{2}$，且$A+B=\dfrac{3\pi}{4}$，

所以$A=\dfrac{5\pi}{8},B=\dfrac{\pi}{8}$；

（2）

由（1）知$\sin 2C=\sin\left(A-B\right)$,

①当$2C=A-B$时，且$A+B+C=\pi$，

若□ABC是锐角三角形，则$A<\dfrac{\pi}{2}$，

所以$2A=\pi+C<\pi$，不成立;

②当$2C+A-B=\pi$时，且$A+B+C=\pi$，

所以$C=2B$，所以$3B>\dfrac{\pi}{2}$，

则$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{4}$，且$C=2B\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right),A\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$,

且$\dfrac{a}{b\cos^2B}=\dfrac{\sin A}{\sin B\cos^2B}=\dfrac{\sin 3B}{\sin B\cos^2B}=3-\tan^2B$，

又$\tan B\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$，所以$\dfrac{a}{b\cos^2B}\in\left(2,\dfrac{8}{3}\right)$.