

无锡市市北高级中学 2022-2023 学年第一学期

高一年级数学学科期中检测试卷

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1. 已知 R 是实数集，集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2\}$ ， $B = \{x \mid 2x - 1 \geq 0\}$ ，则 $A \cap (\complement_R B) =$ ()

- A. $\{1\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ D. $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

2. 已知 $x \neq 0$ ，则“ $\frac{1}{x} < 2021$ ”是“ $x > 2022$ ”的 () 条件

- A. 必要不充分 B. 充分不必要 C. 充分且必要 D. 既不充分也不必要

3. 已知 a, b 为非零实数，且 $a > b$ ，则下列不等式成立的是 ()

- A. $a - c > b - c$ B. $ac^2 > bc^2$ C. $a^2 > b^2$ D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

4. 若偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上是增函数，则下列关系式中成立 是 ()

- A. $f\left(-\frac{3}{2}\right) < f(-1) < f(2)$ B. $f(-1) < f\left(-\frac{3}{2}\right) < f(2)$
C. $f(2) < f(-1) < f\left(-\frac{3}{2}\right)$ D. $f(2) < f\left(-\frac{3}{2}\right) < f(-1)$

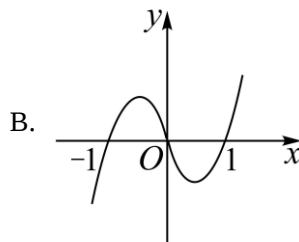
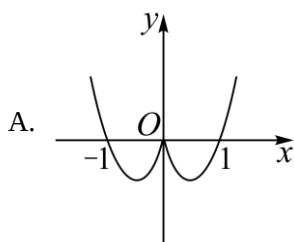
5. 若 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ ， $b = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$ ， $c = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()

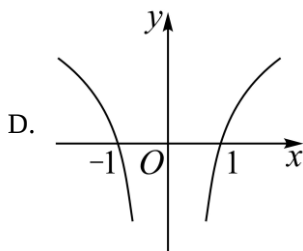
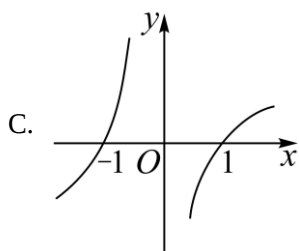
- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$
C. $b > c > a$ D. $c > b > a$

6. 已知关于 x 的不等式 $kx^2 - 6kx + k + 8 > 0$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，则 k 的取值范围是 ()

- A. $0 \leq k \leq 1$ B. $0 \leq k < 1$ C. $k < 0$ 或 $k > 1$ D. $k \leq 0$ 或 $k > 1$

7. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x|}$ 的图象大致为 ()





8. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，用其名字命名的“高斯函数”为：设 $x \in \mathbf{R}$ ，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $y = [x]$ 称为高斯函数.例如： $[-0.5] = -1$ ， $[1.5] = 1$. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2} \times 4^x - 3 \times 2^x + 4 (0 < x < 2)$ ，则函数 $y = [f(x)]$ 的值域为 ()

A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

B. $\{-1, 0, 1\}$

C. $\{-1, 0, 1, 2\}$

D. $\{0, 1, 2\}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目的要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知点 $\left(a, \frac{1}{2}\right)$ 在幂函数 $f(x) = (a-1)x^b$ 的图象上，则函数 $f(x)$ 是 ()

A. 奇函数

B. 偶函数

C. $(0, +\infty)$ 上的增函数

D. $(0, +\infty)$ 上的减函数

10. 下列选项中 p 是 q 充分不必要条件的是 ()

A. $p: 1 < x < 2$, $q: 1 \leq x \leq 2$

B. $p: xy > 1$, $q: x > 1, y > 1$

C. $p: \frac{1}{x} > 1$, $q: x < 1$

D. p : 两直线平行, q : 内错角相等

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$ ，则下列结论中正确的是 ()

A. $f(-2) = 4$

B. 若 $f(m) = 9$ ，则 $m = \pm 3$

C. $f(x)$ 是偶函数

D. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减

12. 下列选项正确的是 ()

A. 对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $x + \frac{1}{x+1}$ 的最小值为 1

B. 若 $ab < 0$ ，则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 的最大值为 -2

C. 若 $a > 0, b > 0$ ，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{\sqrt{ab}}$

D. 若正实数 x, y 满足 $x+2y=1$, 则 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 8

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x \geq -1$, 则 p 的否定为_____.

14. $\log_2 \sqrt{2} + \log_9 27 + 3^{\log_3 16} =$ _____.

15. 若 $f(x) = \frac{ax+1}{x-1}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 已知 $x > 0, y > 0$ 且 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$, 若 $x+y > m^2 + 8m$ 恒成立, 则实数 m 取值范围是_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程及验算步骤.

17. 在① $A \cap B = A$, ② $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = A$, ③ $A \cap B = \emptyset$ 这三个条件中任选一个, 补充到下面 问题中, 求解下列问题:

已知集合 $A = \{x | a-1 < x < 2a+3\}$, $B = \{x | x^2 - 2x - 8 < 0\}$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求 $A \cup B$;

(2) 若_____, 求实数 a 的取值范围.

18. (1) 已知 $x > 3$, 求 $y = x + \frac{4}{x-3}$ 的最小值, 并求取到最小值时 x 的值;

(2) 已知 $0 < x < 1$, 求 $x(4-3x)$ 的最大值.

19. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + (a-1)x - 1 > 0$.

(1) 若此不等式的解集为 $\left\{x \mid -1 < x < -\frac{1}{2}\right\}$, 求实数 a 的值;

(2) 若 $a \in \mathbf{R}$, 解这个关于 x 的不等式;

20. 已知函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 是偶函数. 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, a+2]$ 上单调, 求实数 a 的取值范围;

(3) 当 $a > -1$ 时, 记 $f(x)$ 在区间 $[a, a+2]$ 上的最小值为 $g(a)$, 求 $g(a)$ 的表达式.

21. “绿水青山就是金山银山”, 为了保护环境, 某工厂在政府部门的鼓励下进行技术改进, 把二氧化碳化为某种化工产品, 经测算, 该处理成本 y (单位: 万元) 与处理量 x (单位: 吨) 之间的函数关系可近似表示

为 $y = x^2 - 40x + 1600$, $30 \leq x \leq 50$, 已知每处理一吨二氧化碳可获得价值 20 万元的某种化工产品.

(1) 当处理量为多少吨时, 每吨的平均处理成本最少?

(2) 判断该技术改进能否获利? 如果能获利, 求出最大利润; 如果不能获利, 则国家至少需要补贴多少万元该工厂才不会亏损?

22. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{ax + b}$ 是定义域上的奇函数, 且 $f(-1) = -2$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若方程 $f(x) = m$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的根, 求实数 m 的取值范围;

(3) 令 $h(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2tf(x)$ ($t < 0$), 若对 $\forall x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 都有 $|h(x_1) - h(x_2)| \leq \frac{15}{4}$, 求实数 t 的取值

范围

