江苏省太湖高级中学高三调研检测试卷

数学　　　　　　　　　　2019.4

试卷（满分 160 分　时间 120 分钟）

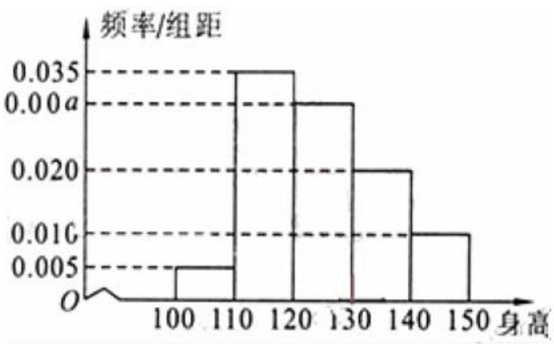
一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分.请把答案填写答题卡相应位置上.

1. 设 i 是虚数单位，若复数 $(1-i)z=2i$,则复数 z 的模为______.

2. 设集合 $A=\{1,\ a\},B=\{2,a^2\}$,若 $A\cap B=\{1\}$,则 $a=$_____

3. 根据如图所示的伪代码，当输入 a 的值为 4 时，输出的 S 的值为______.

```
Read  a
S←0
I←1
While  I≤3
S←S+a
a←a×2
  I←I+1
End  While
Print  S
```



4.从某小学随机抽取 100 名同学，将他们的身高（单位：厘米）数据绘制成频率分布直方图（如图）.若要从身高在[120，130)，[130，140)，[140，150]三组内的学生中，用分层抽样的方法选取 18 人参加一项活动，则从身高在[140，150]内的学生中选取的人数应为______.

5.函数 $f(x)=\dfrac{4}{3}x-x,x\in[-1,1]$ 的最小值为______

6.设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x,(x>0)\\ \log_{\frac{1}{2}}(-x),(x<0)\end{cases}$，$f(a)>f(-a)$,则实数 a 的取值范围是______.

7.已知一个圆锥母线长为 2，其侧面展开图是半圆，则该圆锥的体积为______.

8. 过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点 F 作其渐近线的平行线 l，直线 l 与 y 轴交于点 P，若线段 OP 的中点为双曲线的虚轴端点（O 为坐标原点）,则双曲线的离心率为______.

9. 若实数 $a>0,b>1,$ 且 $a+b=2,$ $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{2b}{b-1}$ 的最小值为_____.

10. 已知函数 $f(x)=a\sin x-2\sqrt{3}\cos x$ 的一条对称轴为 $x=-\dfrac{\pi}{6}$，$f(x_1)+f(x_2)=0$，且函数 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上具有单调性，则 $|x_1+x_2|$ 的最小值为______.

11. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\dfrac{S_n}{S_{2n}}$ 的值为常数，则称数列 $\{a_n\}$ 为“吉祥数列”，这个常数称为数列 $\{a_n\}$ 的“吉祥数”.已知等差数列 $\{b_n\}$ 的首项为 1，公差不为 0，若数列 $\{b_n\}$ 为“吉祥数列”，则它的“吉祥数”是______.

12. 已知函数 $f(x)=x,g(x)=ax^2-x,$ 其中 $a>0,$ 若 $\forall x_1\in[1,2]$，$\exists x_2\in[1,2]$，使得 $f(x_1)f(x_2)=g(x_1)g(x_2)$ 成立，则 a =_______.

13. 在ΔABC中，角 A,B,C 的对边依次为a，b，c，若ΔABC 为锐角三角形，且满足$c^2-b^2=ab$，则$\frac{1}{\tan B}-\frac{1}{\tan C}+2\sin C$的取值范围是______.

14. 已知等差数列$\{a_n\}$中，首项$a_1=1$，公差$d<0$，前n和为S_n，且对任意的$n\in N^*$，总存在$m\in N^*$，使得$S_n=a_m$，则公式$d=$______.

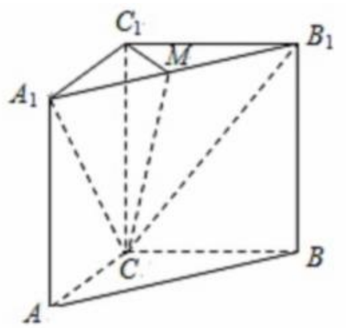
二、解答题（本大题共 6 小题，共计 90 分，请在答题纸指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

15.（本小题满分 14 分）

如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC=BC$，点M为棱A_1B_1的中点.

求证：（1）$AB\,//$平面A_1B_1C；

（2）平面$C_1CM\perp$平面A_1B_1C.



16.（本小题满分 14 分）

已知$\vec{a}=(\sin(\alpha+\frac{\pi}{6}),3)$，$\vec{b}=(1,4\cos\alpha),\alpha\in(0,\pi)$.

（1）若$\vec{a}\perp\vec{b}$，求$\tan\alpha$的值；

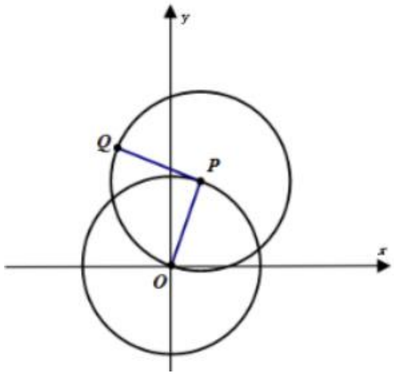
（2）若$\vec{a}\,//\,\vec{b}$，求α的值.

17.（本小题满分 14 分）

动点 $P(x,y)$ 在圆上绕原点 O 沿逆时针方向匀速旋转，12 秒旋转一周.设转动时间为 t 秒，点 $Q(m,n)$ 在以 P 为圆心，1 为半径的圆上，且 $OP\perp PQ$,其中 O,P,Q 按逆时针顺序排列.

（1）若时间 $t=0$ 时点 P 位置为 $(1,0)$，求 Q 的坐标.

（2）设转动时间为 t（秒）若时间 $t=0$ 是点 P 的位置为 $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，求当 $0\le t\le 12$ 时动点 P 的纵坐标 y 关于 t（秒）的函数关系式及 $y+n$ 的最大值.

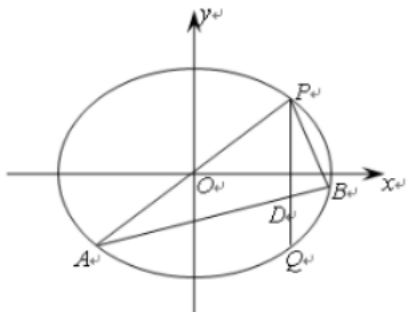


18.（本小题满分 16 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且点 $(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 在椭圆 C 上.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设 P 为椭圆上第一象限内的点，点 P 关于原点 O 对称点为 A，点 P 关于 x 轴的对称点为 Q ,设 $\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{PQ}$，直线 AD 与椭圆 C 的另一个交点为 B，若 $PA\perp PB$,求实数 λ 的值.



19.（本小题满分 16 分）

设集合 W 由满足下列两个条件的数列$\{a_n\}$构成：

①$\frac{a_n+a_{n+2}}{2}<a_{n+1}$；②存在实数$M$，使$a_n\le M$．（n 为正整数）

（Ⅰ）在只有 5 项的有限数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$中，其中$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$a_4=4$，$a_5=5$；$b_1=1$，$b_2=4$，$b_3=5$，$b_4=4$，$b_5=1$试判断数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$是否为集合 W 中的元素；

（Ⅱ）设$\{c_n\}$是等差数列，S_n是其前 n 项和，$c_3=4,S_3=18$，证明数列$\{S_n\}\in$W；并写出 M 的取值范围；

（Ⅲ）设数列$\{d_n\}\in$W，且对满足条件的常数 M，存在正整数k，使$d_k=M$．

求证：$d_{k+1}>d_{k+2}>d_{k+3}$．

20.（本小题满分 16 分）

已知函数$f(x)=x-a\ln x(x\in R^*),a$为实数，若$f(x)$有两个零点$x_1,x_2$且$x_1<x_2$.

（1）求a的取值范围而；

（2）证明：x_2-x_1随a的增大而增大；

（3）证明：$x_2x_1>e^2$

参考答案

1、$\sqrt{2}$　　2、-1　　3、28　　4、3　　5、$-\frac{1}{3}$　　6、$(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　7、$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　8、2

9、$\frac{9}{2}$　　10、　　11、$\frac{1}{4}$　　12、$\frac{3}{2}$　　13、$(\frac{5\sqrt{3}}{3},3)$　　14、-1

15. 证明：(1) $\because AA_1 \parallel BB_1, AA_1 = BB_1$，

$\therefore$四边形 AA_1B_1B 是平行四边形，

$\therefore AB \parallel A_1B_1$，

又 $AB \not\subset$平面 $A_1B_1C, A_1B_1 \subset$平面 A_1B_1C，

$\therefore AB \parallel$平面 A_1B_1C.

(2)由(1)证明同理可知

$AC = A_1C_1, BC = B_1C_1$，

$\because AB = BC, \therefore A_1B_1 = B_1C_1$，

$\because M$ 是 A_1B_1 的中点，

$\therefore C_1M \perp A_1B_1$，

$\because CC_1 \perp$平面 $A_1B_1C_1, B_1A_1 \subset$平面 $A_1B_1C_1$，

$\therefore CC_1 \perp B_1A_1$，

又 $CC_1 \cap C_1M = C_1$，

$\therefore B_1A_1 \perp$平面 C_1CM，

又 $B_1A_1 \subset$平面 $A_1B_1C_1$，

$\therefore$平面 $C_1CM \perp$平面 A_1B_1C.

16.(1) 因为$\vec{a} \perp \vec{b}$，所以

$\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) + 12\cos\alpha = 0$，　　......2分

即$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha + 12\cos\alpha = 0$，即

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{25}{2}\cos\alpha = 0$。　　......4分

又$\cos\alpha \neq 0$，所以$\tan\alpha = -\frac{25\sqrt{3}}{3}$。　　......6分

（2）若$\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$，则$4\cos\alpha\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=3$,

......8分

即$4\cos\alpha(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha)=3$，所以

$\sqrt{3}\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=2$,　　......10分

所以$\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})=1$,　　......11分

因为$\alpha\in(0,\pi)$，所以$2\alpha+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6})$,

....13分

所以$2\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$\alpha=\frac{\pi}{6}$。　　......14分

17. 解：(I) 由已知 $PQ\perp x$轴，PQ=1，∴Q(1，1) •••• 4 分

(II) 由题意知角速度 $\omega=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$，•••••••••••••••••• 6 分

经过 t 秒后，$\angle POx=\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3}$，∴P 的纵坐标 $y=1\cdot\sin(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3})$ •••••• 8 分

法一：连接 OQ，由 $OP\perp PQ$，PQ=OP=1，

∴OQ=$\sqrt{2}$，$\angle QOP=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore n=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})$，　　　••••• 10 分

法二：$\overrightarrow{OP}=\left(\cos(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3}),(\sin(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3})\right)$，

$\overrightarrow{PQ}=\left(\cos[(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{2}],\sin[(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{2}]\right)$

$\therefore n=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})$，　　　••••• 10 分

$y+n=\sin(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3})+\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=2\sin(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3})+\cos(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3})$

$=\sqrt{5}\sin(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3}+\varphi)$,其中$\tan\varphi=\frac{1}{2}$,$\varphi$为锐角，•••••• 12 分

∵0≤t≤12，∴y+n 的最大值为$\sqrt{5}$。•••••• 14 分

18. 解：(1)因为点$(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$在椭圆 C 上，则$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{2b^2}=1$，

又椭圆 C 的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $c=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

所以 $b^2=a^2-c^2=a^2-(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2=\frac{1}{4}a^2$，代入上式，可得$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{2\times\frac{1}{4}a^2}=1$，

解得 $a^2=4$，故 $b^2=\frac{1}{4}a^2=1$.

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ··

(2)设 $P(x_0,y_0)$，则 $A(-x_0,-y_0)$，$Q(x_0,-y_0)$.

因为$PD=\lambda PQ$，则$(0,y_D-y_0)=\lambda(0,-2y_0)$，故 $y_D=(1-2\lambda)y_0$.

所以点 D 的坐标为$(x_0,(1-2\lambda)y_0)$. ··

设 $B(x_1,y_1)$，则 $k_{PB}\cdot k_{BA}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{y_1+y_0}{x_1+x_0}=\frac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}=\frac{(1-\frac{x_1^2}{4})-(1-\frac{x_0^2}{4})}{x_1^2-x_0^2}=-\frac{1}{4}$. ···

又 $k_{BA}=k_{AD}=\frac{(1-2\lambda)y_0-(-y_0)}{x_0-(-x_0)}=(1-\lambda)\cdot\frac{y_0}{x_0}$，

故 $k_{PB}=-\frac{1}{4k_{BA}}=-\frac{x_0}{4(1-\lambda)y_0}$.

又 $PA\perp PB$，且 $k_{PA}=\frac{y_0}{x_0}$，

所以 $k_{PB}k_{PA}=-1$，即$-\frac{x_0}{4(1-\lambda)y_0}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-1$，解得 $\lambda=\frac{3}{4}$.

所以 $\lambda=\frac{3}{4}$. ···

19、**【解答】** 解：（I）对于数列$\{a_n\}$，当$n=1$时，$\frac{a_1+a_3}{2}=2=a_2$，

显然不满足集合W的条件①，故$\{a_n\}$不是集合W中的元素．

对于数列$\{b_n\}$，当$n=\{1，2，3，4，5\}$时，

不仅有$\frac{b_1+b_3}{2}=3<b_2$，$\frac{b_2+b_4}{2}=4<b_3$，$\frac{b_3+b_5}{2}=3<b_4$，

而且有$b_n\leqslant 5$，显然满足集合W的条件①②，故$\{b_n\}$是集合W中的元素．

（II）$\because\{c_n\}$是等差数列，S_n是其前n项和，$c_3=4$，$S_3=18$，设其公差为d，

$\therefore c_3-2d+c_3-d+c_3=18$，

$\therefore d=-2$

$\therefore c_n=c_3+(n-3)d=-2n+10$，$S_n=-n^2+9n$

$\because\frac{S_n+S_{n+2}}{2}-S_{n+1}=-1<0$，$\therefore\frac{S_n+S_{n+2}}{2}<S_{n+1}$；

$\because S_n=-(n-\frac{9}{2})^2+\frac{81}{4}$，$\therefore S_n$的最大值是$S_4=S_5=20$，即$S_n\leqslant S_4=20$．

$\therefore\{S_n\}\in W$，且M的取值范围是$[20，+\infty)$

（III）证明：$\because\{d_n\}\in W$，$\therefore\frac{d_k+d_{k+2}}{2}<d_{k+1}$，

整理$d_{k+2}<d_{k+1}+(d_{k+1}-d_k)=d_{k+1}+(d_{k+1}-M)$，

$\because d_k=M$，$\therefore d_{k+1}\leqslant M$，$\therefore d_{k+2}<d_{k+1}$；

又$\because\frac{d_{k+1}+d_{k+3}}{2}<d_{k+2}$，$\therefore d_{k+3}<d_{k+2}+(d_{k+2}-d_{k+1})<d_{k+2}$，

$\therefore d_{k+1}>d_{k+2}>d_{k+3}$．

20. (1) $f(x)$有两个零点。显然$a\neq0$，故$\frac{1}{a}=\frac{lnx}{x}$.记$g(x)=\frac{lnx}{x}$，$g'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}$.

当$x\in(0, e)$时，$g(x)$单调增；当$x\in(e, +\infty)$时，$g(x)$单调减.

综上所述，当$0<\frac{1}{a}<\frac{lne}{e}$即$a>e$时，函数$f(x)$有两个零点$x_1$，$x_2$.

(2)取a_1，a_2，不妨设$e<a_1<a_2$，则$0<\frac{1}{a_2}<\frac{1}{a_1}<\frac{1}{e}$.

设$g(x)=\frac{lnx}{x}$与$y=\frac{1}{a_1}$交于$\left(x_1, \frac{1}{a_1}\right)$与$\left(x_2, \frac{1}{a_1}\right)$,

设$g(x)=\frac{lnx}{x}$与$y=\frac{1}{a_2}$交于$\left(x_3, \frac{1}{a_2}\right)$与$\left(x_4, \frac{1}{a_2}\right)$,

$\because g(x)=\frac{lnx}{x}$在区间$(0, e)$单调增，在区间$(e, +\infty)$单调减，$0<\frac{1}{a_2}<\frac{1}{a_1}<\frac{1}{e}$,

$\therefore 0<x_3<x_1<e<x_2<x_4$,

$\therefore x_4-x_3>x_2-x_1$.

综上所述：x_2-x_1随着a的增大而增大.

(3)构造$h(x)=g(x)-g\left(\frac{e^2}{x}\right)$，$x\in(e, +\infty)$

$h'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}-\frac{1-lnx}{e^2}=(1-lnx)\frac{e^2-x^2}{x^2e^2}$

当$x\in(e, +\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调增,

$\therefore h(x)>h(e)=0$，即$g(x)>g\left(\frac{e^2}{x}\right)$,

$\because 0<x_1<e<x_2$,

$\therefore g(x_1)=g(x_2)>g\left(\frac{e^2}{x_2}\right)$，且$x_1$，$\frac{e^2}{x_2}\in(0, e)$,

$\because x\in(0, e)$时，$g(x)$单调增,

$\therefore x_1>\frac{e^2}{x_2}$，即$x_1x_2>e^2$.