

高一数学

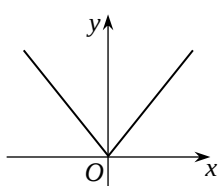
2020.11

命题：黄荣

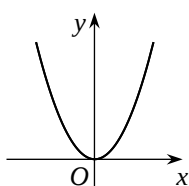
审核：冯一成

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

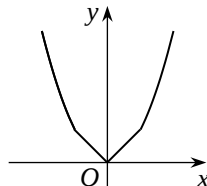
1. 设集合 $A = \{a, 6\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$, 则 $A \cup B =$
 A. $\{3, 4, 5, 6\}$ B. $\{3\}$ C. $\{3, 6\}$ D. $\{3, 4, 5\}$
2. 命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ” 的否定是
 A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 1 \geq 0$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 1 \geq 0$
 C. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 1 < 0$ D. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 1 < 0$
3. “ $a > b > 0$ ” 是 “ $a^2 > b^2$ ” 的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $A(4, 2)$, $B(16, m)$, 则 $m =$
 A. 1 B. 2 C. 4 D. 8
5. 已知集合 $A = \{x \mid mx^2 + 4x + 1 = 0\}$ 仅有一个元素, 则 m 的值是
 A. 0 B. 4 C. 0 或 4 D. 不能确定
6. 已知 $a = 2^{0.4}$, $b = 2^{0.6}$, $c = \log_2 \frac{1}{2}$, 则 a, b, c 的大小关系是
 A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$
7. 已知 $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$, 设 $h(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq g(x) \\ g(x), & f(x) > g(x) \end{cases}$, 则函数 $h(x)$ 大致图象是



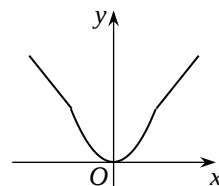
A.



B.



C.



D.

8. 十六世纪中叶, 英国数学家雷科德在《砺智石》一书中首先把 “=” 作为等号使用, 后来英国数学家哈利奥特首次使用 “<” 和 “>” 符号, 并逐渐被数学界接受, 不等号的引入对不等式的发展影响深远. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则下列命题正确的是
 A. 若 $a > 0$, 则 $a^2 + 1 > (a-1)(a+2)$ B. 若 $a > b > 0$, 则 $ac^2 > bc^2$
 C. 若 $a > b$, 且 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 则 $ab > 0$ D. 若 $a > b > 0$, 则 $\frac{a}{a^2 + 1} > \frac{b}{b^2 + 1}$

9. 已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-\infty, -2)\cup(4, +\infty)$, 则

B. 不等式 $bx+c>0$ 的解集为 $\{x \mid x < -4\}$

D. 不等式 $cx^2 - bx + a < 0$ 的解集为 $\{x \mid x < -\frac{1}{4} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$

A. $y=x^2+1$

B. $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$

C. $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$

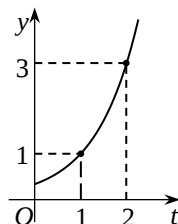
D. $y = |x + 1| + |x - 1|$

A. 浮萍每月增加的面积都相等

B. 第4个月时, 浮萍面积会超过 25m^2

C. 浮萍面积蔓延到 100m^2 只需 6 个月

D. 若浮萍面积蔓延到 10m^2 , 20m^2 , 40m^2 所需时间分别为 t_1 , t_2 , t_3 , 则 $t_1+t_3=2t_2$



A. 集合 $M=\{1, 0, -1\}$ 为 F 集合

B. 有理数集为 F 集合

C. 集合 $M = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$ 为 F 集合

D. 若集合 A, B 为 F 集合, 则 $A \cup B$ 为 F 集合

13. 函数 $y = \sqrt{2^x - 1}$ 的定义域为 ▲.

14. 为了保护水资源, 提倡节约用水, 某城市对居民生活用水实行“阶梯水价”. 计费方法如表所示, 若某户居民某月交纳水费 60 元, 则该月用水量 ▲ m^3 .

每户每月用水量	水价
不超过 12m ³ 的部分	3 元/m ³
超过 12m ³ 但不超过 18m ³ 的部分	6 元/m ³
超过 18m ³ 的部分	9 元/m ³

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 6, & x \leq 2, \\ \frac{a}{x}, & x > 2 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则 a 的取值范围为 ▲ .

16. 已知函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{x+1} - 2^{x-1}$, 若关于 x 的

方程 $f(x^2 + 4x + t) = \frac{5}{3}$ 在 $[1, 3]$ 上有解, 则 t 的最大值为 $\blacktriangle$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

求值: (1) $\sqrt[5]{32} + 8^{\frac{2}{3}} + (\frac{1}{2})^0 + (\frac{4}{9})^{-\frac{1}{2}}$;

(2) $\log_3 54 - \log_3 2 + \log_2 3 \cdot \log_3 4$.

$\blacktriangle \quad \blacktriangle \quad \blacktriangle$

18. (本题满分 12 分)

已知集合 $A = \{x \mid 2 < x < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4ax + 3a^2 < 0\}$.

(1) 若 $a = 1$, 求 $(\complement_{\mathbf{R}} B) \cap A$;

(2) 若 $a > 0$, 设命题 $p: x \in A$, 命题 $q: x \in B$. 已知命题 p 是命题 q 的充分不必要条件, 求实数 a 的取值范围.

$\blacktriangle \quad \blacktriangle \quad \blacktriangle$

19. (本题满分 12 分)

已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$.

(1) 求 $x + y$ 的最小值;

(2) 若 $xy > m^2 + 6m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

$\blacktriangle \quad \blacktriangle \quad \blacktriangle$

20. (本题满分 12 分)

某制造商为拓展业务, 引进了一种生产体育器材的新型设备. 通过市场分析发现, 每月需投入固定成本 3000 元, 生产 x 台需另投入成本 $C(x)$ 元, 且

$$C(x) = \begin{cases} 10x^2 + 40x, & 0 < x < 40 \\ 1004x + \frac{10000}{x} - 9800, & 40 \leq x \leq 100, \end{cases} \quad \text{若每台售价 1000 元, 且每月生产的}$$

体育器材月内能全部售完.

(1) 求制造商所获月利润 $L(x)$ (元) 关于月产量 x (台) 的函数关系式;

(2) 当月产量为多少台时, 制造商由该设备所获的月利润最大? 并求出最大月利润.

$\blacktriangle \quad \blacktriangle \quad \blacktriangle$

21. (本题满分 12 分)

设 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \frac{e^x + a}{e^x - a}$ (e 为常数, $e = 2.718\ 28\cdots$).

(1) 若 $a = 1$, 求证: 函数 $f(x)$ 为奇函数;

(2) 若 $a < 0$.

① 判断并证明函数 $f(x)$ 的单调性;

② 若存在 $x \in [1, 2]$, 使得 $f(x^2 + 2ax) > f(4 - a^2)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.



22. (本题满分 12 分)

关于函数对称性的问题, 有如下事实:

① 证明函数图象的对称性就是证明图象上点的对称性. 例如, 证明函数图象关于 y 轴对称, 就是证明图象上的任一点关于 y 轴的对称点也在图象上.

② 点的坐标能满足函数关系式就说明点在函数图象上.

③ 偶函数图象关于 y 轴对称这个结论可以推广. 例如, 函数图象关于直线 $x = 1$ 对称的充要条件是函数 $y = f(x + 1)$ 是偶函数.

请根据上述信息完成以下问题:

(1) 从偶函数定义出发, 证明函数 $y = f(x)$ 是偶函数的充要条件是它的图象关于 y 轴对称;

(2) 求函数 $g(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$ 的对称轴;

(3) 已知函数 $y = h(x + 2)$ 为偶函数, 且 $y = h(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 若函数 $h(x)$ 图象上两点 $A(m, y_1)$, $B(1 - 2m, y_2)$ 满足 $y_1 > y_2$, 求实数 m 的取值范围.



高一数学

2020.11

命题：黄荣

审核：冯一成

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{a, 6\}$, $B=\{3, 4, 5\}$, $A \cap B=\{3\}$, 则 $A \cup B=$

- A. $\{3, 4, 5, 6\}$ B. $\{3\}$ C. $\{3, 6\}$ D. $\{3, 4, 5\}$

答案：A

解析：因为集合 $A=\{a, 6\}$, $B=\{3, 4, 5\}$, $A \cap B=\{3\}$, 所以 $a=3$,
所以集合 $A=\{3, 6\}$, 所以 $A \cup B=\{3, 4, 5, 6\}$.

2. 命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2-2x+1 \geq 0$ ” 的否定是

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2-2x+1 \geq 0$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2-2x+1 \geq 0$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2-2x+1 < 0$ D. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2-2x+1 < 0$

答案：D

解析：全称量词的命题，首先把全称量词变为存在量词，其次否定结论，故选 D.

3. “ $a > b > 0$ ” 是 “ $a^2 > b^2$ ” 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

答案：A

解析： $\because$ “ $a > b > 0$ ” 能得到 “ $a^2 > b^2$ ”，但是 “ $a^2 > b^2$ ” 推不出 “ $a > b > 0$ ”，故 “ $a > b > 0$ ” 是 “ $a^2 > b^2$ ” 的充分不必要条件，故选 A.

4. 已知幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $A(4, 2)$, $B(16, m)$, 则 $m=$

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

答案：C

解析：设幂函数 $f(x)=x^\alpha$, 且经过点 $A(4, 2)$, 所以 $2=4^\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=x^{\frac{1}{2}}$,

所以 $m=f(16)=16^{\frac{1}{2}}=4$, 故选 C.

5. 已知集合 $A=\{x \mid mx^2+4x+1=0\}$ 仅有一个元素，则 m 的值是

- A. 0 B. 4 C. 0 或 4 D. 不能确定

答案：C

解析：本题如果是一元一次方程，则 $m=0$, 集合 A 有且只有一个元素符合题意；
若 $m \neq 0$, 是一元二次方程，则 $16-4m=0 \Rightarrow m=4$, 综上 m 的值为 0 或 4.

6. 已知 $a=2^{0.4}$, $b=2^{0.6}$, $c=\log_2 \frac{1}{2}$, 则 a, b, c 的大小关系是

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

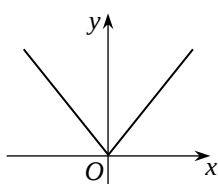
答案: D

解析: $\because 2 > 1, \therefore y = 2^x$ 单调递增, $y = \log_2 x$ 单调递增,

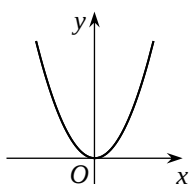
故 $2^{0.6} > 2^{0.4} > 2^0 = 1$, 即 $b > a > 1$, $\log_2 \frac{1}{2} < \log_2 1 = 0$, 即 $c < 0$,

所以 $c < a < b$, 故 D.

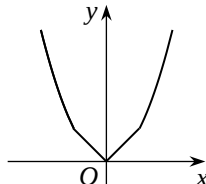
7. 已知 $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$, 设 $h(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq g(x), \\ g(x), & f(x) > g(x), \end{cases}$ 则函数 $h(x)$ 大致图象是



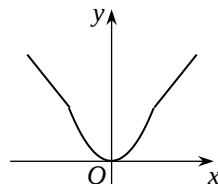
A.



B.



C.



D.

答案: D

解析: 数形结合, 在同一直角坐标系中分别画出函数 $f(x) = |x|$ 和 $g(x) = x^2$ 的图像, 然后把两个函数每一段较小部分找出来即可, 选 D.

8. 十六世纪中叶, 英国数学家雷科德在《砺智石》一书中首先把“=”作为等号使用, 后来英国数学家哈利奥特首次使用“<”和“>”符号, 并逐渐被数学界接受, 不等号的引入对不等式的发展影响深远. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则下列命题正确的是

A. 若 $a > 0$, 则 $a^2 + 1 > (a-1)(a+2)$

B. 若 $a > b > 0$, 则 $ac^2 > bc^2$

C. 若 $a > b$, 且 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 则 $ab > 0$

D. 若 $a > b > 0$, 则 $\frac{a}{a^2 + 1} > \frac{b}{b^2 + 1}$

答案: C

解析: 选项 A, 取 $a = 3$, $a^2 + 1 = (a-1)(a+2)$, 故 A 错误;

选项 B, 当 $c = 0$ 时, 则 $ac^2 = bc^2$, 故 B 错误;

选项 D, 当 $a = 2$, $b = 1$ 时, $\frac{a}{a^2 + 1} = \frac{2}{5}$, $\frac{b}{b^2 + 1} = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$, 故 D 错误. 综上

选 C.

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.

9. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$, 则

A. $a > 0$

B. 不等式 $bx + c > 0$ 的解集为 $\{x \mid x < -4\}$

C. $a + b + c > 0$

D. 不等式 $cx^2 - bx + a < 0$ 的解集为 $\{x \mid x < -\frac{1}{4} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$

答案: ABD

解析：根据题意，选项 A 正确是很好判断的，即 $a > 0$ ，

所以 $x = -2$ 或 4 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根，故 $-2 + 4 = -\frac{b}{a}$ ， $-2 \times 4 = \frac{c}{a}$

，
 $\therefore b = -2a$ ， $c = -8a$ ， $\therefore bx + c > 0$ ，即 $-2ax - 8a > 0$ ，所以得 $x < -4$ 成立，B 正确；

根据图像，即可判断 $x = 1$ 时，纵坐标小于 0，即 $a + b + c < 0$ ，故 C 错误；

$cx^2 - bx + a < 0$ ， $\therefore -8a^2 + 2ax - a < 0$ ， $\therefore 8x^2 - 2x - 1 < 0$ ，解得 $x < -\frac{1}{4}$ 或 $x > \frac{1}{2}$ ，

故 D 正确。故选 ABD。

10. 下列函数中是偶函数的有

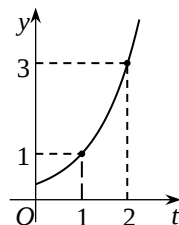
- A. $y = x^2 + 1$ B. $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$
 C. $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$ D. $y = |x+1| + |x-1|$

答案：ABD

解析：选项 C，定义域为 $\{1\}$ ，不关于原点对称，是非奇非偶函数，其他函数都满足偶函数的要求，故选 ABD。

11. 如图，某河塘浮萍面积 $y(\text{m}^2)$ 与时间 $t(\text{月})$ 的关系式为 $y = ka^t$ ，则下列说法正确的是

- A. 浮萍每月增加的面积都相等
 B. 第 4 个月时，浮萍面积会超过 25m^2
 C. 浮萍面积蔓延到 100m^2 只需 6 个月
 D. 若浮萍面积蔓延到 10m^2 ， 20m^2 ， 40m^2 所需时间分别为 t_1 ， t_2 ， t_3 ，
 则 $t_1 + t_3 = 2t_2$



答案：BCD

解析：由图可知，函数过点 $(1, 1)$ ， $(2, 3)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} ka = 1 \\ ka^2 = 3 \end{cases}, \text{ 解得 } a = 3, k = \frac{1}{3}, \therefore y = 3^{t-1},$$

当 t 取 1, 2, 3 时， y 取 1, 3, 9，显然 A 错误；

当 $t = 4$ 时， $y = 27 > 25$ ，故 B 正确；

当 $t = 5$ 时， $y = 81$ ，当 $t = 6$ 时， $y = 243$ ，故 C 正确；

选项 D 中，可知 $t_1 = \log_3 10 + 1$ ， $t_2 = \log_3 20 + 1$ ， $t_3 = \log_3 40 + 1$ ，

$t_1 + t_3 = \log_3 10 + 1 + \log_3 40 + 1 = \log_3 400 + 2 = 2\log_3 20 + 2 = 2t_2$ ，故 D 正确。

故选 BCD。

12. 对于给定数集 M ，若对于任意 $a, b \in M$ ，有 $a + b \in M$ ， $a - b \in M$ ，则称集合 M 为 F 集合，则下列说法中正确的有

- A. 集合 $M=\{1, 0, -1\}$ 为 F 集合
 B. 有理数集为 F 集合
 C. 集合 $M=\{x \mid x=2k, k \in \mathbf{Z}\}$ 为 F 集合
 D. 若集合 A, B 为 F 集合, 则 $A \cup B$ 为 F 集合

答案: BC

解析: 选项 A, $1 - (-1) = 2 \notin M$, 所以 A 错误;

因为有理数 + 有理数 = 有理数, 有理数 - 有理数 = 有理数, 故 B 正确;

因为偶数 + 偶数 = 偶数, 偶数 - 偶数 = 偶数, 故 C 正确;

取集合 $A=\{1, 0\}$, 取集合 $B=\{2, 0\}$, 则 $A \cup B = \{0, 1, 2\}$, 显然 $1+2=3 \notin A \cup B$.

故选 BC.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 函数 $y = \sqrt{2^x - 1}$ 的定义域为 ▲ .

答案: $[0, +\infty)$

解析: $2^x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$, 故原函数的定义域为 $[0, +\infty)$.

14. 为了保护水资源, 提倡节约用水, 某城市对居民生活用水实行“阶梯水价”. 计费方法如表所示, 若某户居民某月交纳水费 60 元, 则该月用水量 ▲ m^3 .

每户每月用水量	水价
不超过 12m^3 的部分	3 元/ m^3
超过 12m^3 但不超过 18m^3 的部分	6 元/ m^3
超过 18m^3 的部分	9 元/ m^3

答案: 16

解析: 大致先判断出用水量在 12 到 18 之间, $(60 - 12 \times 3) \div 6 + 12 = 16$.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 6, & x \leq 2, \\ \frac{a}{x}, & x > 2 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则 a 的取值范围为 ▲ .

答案: $[2, \frac{20}{9}]$

解析: 由题意知, $\begin{cases} a > 0 \\ a \geq 2 \\ 4 - 4a + 6 \geq \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow 2 \leq a \leq \frac{20}{9}.$

16. 已知函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{x+1} - 2^{x-1}$, 若关于 x 的

方程 $f(x^2+4x+t)=\frac{5}{3}$ 在 $[1, 3]$ 上有解, 则 t 的最大值为 ▲ .

答案: - 7

解析: 当 $x>0$ 时, $f(x)=\frac{1}{x+1}-2^{x-1}$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 注意到 $f(2)=-\frac{5}{3}$,

由函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 得 $f(-2)=\frac{5}{3}$,

所以方程 $f(x^2+4x+t)=\frac{5}{3}$ 在 $[1, 3]$ 上有解, 即 $x^2+4x+t=-2$ 在 $[1, 3]$ 上有解,

$t=-x^2-4x-2\in[-23, -7]$, 故 t 的最大值为 - 7.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

求值: (1) $\sqrt[5]{32}+8^{\frac{2}{3}}+(\frac{1}{2})^0+(\frac{4}{9})^{-\frac{1}{2}}$;

(2) $\log_3 54 - \log_3 2 + \log_2 3 \cdot \log_3 4$.

解: (1) 原式 $= 2 + 4 + 1 + \frac{3}{2} = \frac{17}{2}$

(2) 原式 $= \log_3 \log_3 \frac{54}{2} + \log_2 4 = 5$

18. (本题满分 12 分)

已知集合 $A = \{x \mid 2 < x < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4ax + 3a^2 < 0\}$.

(1) 若 $a=1$, 求 $(\complement_{\mathbf{R}} B) \cap A$;

(2) 若 $a>0$, 设命题 $p: x \in A$, 命题 $q: x \in B$. 已知命题 p 是命题 q 的充分不必要条件, 求实数 a 的取值围.

解: (1) $a=1$ 时, $B=(1, 3)$,

则 $\complement_{\mathbf{R}} B = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

所以 $(\complement_{\mathbf{R}} B) \cap A = [3, 4)$.

(2) $a>0$ 时, $B=(a, 3a)$.

因为命题 p 是命题 q 的必要不充分条件, 则 $A \nabla B$,

所以 $\begin{cases} a \leq 2, \\ 4 \leq 3a, \\ a=2 \text{ 和 } 4=3a \text{ 不同时成立,} \end{cases}$ 解得 $\frac{4}{3} \leq a \leq 2$,

所以实数 a 的取值范围为 $[\frac{4}{3}, 2]$.

19. (本题满分 12 分)

已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$.

(1) 求 $x+y$ 的最小值;

(2) 若 $xy > m^2 + 6m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

解: (1) 因为 $x > 0$, $y > 0$,

$$\text{所以 } x+y = (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right) = 5 + \frac{4x}{y} + \frac{y}{x} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 9,$$

当且仅当 $\frac{4x}{y} = \frac{y}{x}$, 即 $x=3$, $y=6$ 时取等号,

所以 $x+y$ 的最小值为 9.

(2) 因为 $x > 0$, $y > 0$,

$$\text{所以 } 1 = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{4}{y}} = \frac{4}{\sqrt{xy}},$$

所以 $xy \geq 16$.

又因为 $xy > m^2 + 6m$ 恒成立,

所以 $16 > m^2 + 6m$,

解得 $-8 < m < 2$,

所以 m 的取值范围为 $(-8, 2)$.

20. (本题满分 12 分)

某制造商为拓展业务, 引进了一种生产体育器材的新型设备. 通过市场分析发现, 每月需投入固定成本 3000 元, 生产 x 台需另投入成本 $C(x)$ 元, 且

$$C(x) = \begin{cases} 10x^2 + 40x, & 0 < x < 40 \\ 1004x + \frac{10000}{x} - 9800, & 40 \leq x \leq 100, \end{cases} \quad \text{若每台售价 1000 元, 且每月生产的}$$

体育器材月内能全部售完.

(1) 求制造商所获月利润 $L(x)$ (元) 关于月产量 x (台) 的函数关系式;

(2) 当月产量为多少台时, 制造商由该设备所获的月利润最大? 并求出最大月利润.

解: (1) 当 $0 < x < 40$ 时, $L(x) = 1000x - 10x^2 - 400x - 3000 = -10x^2 + 600x - 3000$;

$$\begin{aligned} \text{当 } 40 \leq x \leq 100 \text{ 时, } L(x) &= 1000x - 1004x - \frac{10000}{x} + 9800 - 3000 \\ &= 6800 - \left(4x + \frac{10000}{x}\right). \end{aligned}$$

$$\text{所以 } L(x) = \begin{cases} -10x^2 + 600x - 3000, & 0 < x < 40, \\ 6800 - \left(4x + \frac{10000}{x}\right), & 40 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

(2) ①当 $0 < x < 40$ 时, $L(x) = -10(x-30)^2 + 6000$,
 所以当 $x=30$ 时, $L(x)_{\max} = L(30) = 6000$.

$$\text{②当 } 40 \leq x \leq 100 \text{ 时, } L(x) = 6800 - \left(4x + \frac{10000}{x}\right)$$

$$\leq 6800 - 2\sqrt{4x \cdot \frac{10000}{x}} = 6400,$$

当且仅当 $4x = \frac{10000}{x}$, 即 $x=50$ 时取等号.

因为 $6400 > 6000$, 所以 $x=50$ 时, $L(x)$ 最大.

答: 月产量为 50 台时, 所获的月利润最大, 最大月利润为 6400 元.

21. (本题满分 12 分)

设 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \frac{e^x + a}{e^x - a}$ (e 为常数, $e = 2.718\ 28 \dots$).

(1) 若 $a=1$, 求证: 函数 $f(x)$ 为奇函数;

(2) 若 $a < 0$.

①判断并证明函数 $f(x)$ 的单调性;

②若存在 $x \in [1, 2]$, 使得 $f(x^2 + 2ax) > f(4 - a^2)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

解: (1) 当 $a=1$ 时, 函数 $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$,

因为 $e^x - 1 \neq 0$, 则 $x \neq 0$,

所以 $f(x)$ 定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$,

$$\text{对任意 } x \neq 0, \quad f(-x) = \frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = \frac{1 + e^x}{1 - e^x} = -f(x)$$

所以 $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ 是奇函数.

(2) ①当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数, 证明如下:

证明: $a < 0$ 时, $e^x - a > 0$ 恒成立, 故函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$.

任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $e^{x_1} < e^{x_2}$,

$$\text{因为 } f(x_1) - f(x_2) = \left(1 + \frac{2a}{e^{x_1} - a}\right) - \left(1 + \frac{2a}{e^{x_2} - a}\right) = \frac{2a(e^{x_2} - e^{x_1})}{(e^{x_1} - a)(e^{x_2} - a)} < 0,$$

所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数.

②设命题 p : 存在 $x \in [1, 2]$, 使得 $f(x^2 + 2ax) > f(4 - a^2)$ 成立.

下面研究命题 p 的否定:

$\neg p$: $\forall x \in [1, 2]$, $f(x^2 + 2ax) \leq f(4 - a^2)$ 恒成立.

若 $\neg p$ 为真命题, 由①, $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数,

故 $\forall x \in [1, 2]$, $x^2 + 2ax \leq 4 - a^2$ 恒成立.

设 $g(x) = x^2 + 2ax + a^2 - 4$, $x \in [1, 2]$,

$$\begin{cases} a < 0, \\ g(1) \leq 0, \text{ 解得 } -3 \leq a < 0. \\ g(2) \leq 0, \end{cases}$$

因为 p 为真, 则 $\neg p$ 为假命题,

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -3)$.

22. (本题满分 12 分)

关于函数对称性的问题, 有如下事实:

①证明函数图象的对称性就是证明图象上点的对称性. 例如, 证明函数图象关于 y 轴对称, 就是证明图象上的任一点关于 y 轴的对称点也在图象上.

②点的坐标能满足函数关系式就说明点在函数图象上.

③偶函数图象关于 y 轴对称这个结论可以推广. 例如, 函数图象关于直线 $x=1$ 对称的充要条件是函数 $y=f(x+1)$ 是偶函数.

请根据上述信息完成以下问题:

(1) 从偶函数定义出发, 证明函数 $y=f(x)$ 是偶函数的充要条件是它的图象关于 y 轴对称;

(2) 求函数 $g(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$ 的对称轴;

(3) 已知函数 $y=h(x+2)$ 为偶函数, 且 $y=h(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 若函数 $h(x)$ 图象上两点 $A(m, y_1)$, $B(1-2m, y_2)$ 满足 $y_1 > y_2$, 求实数 m 的取值范围.

解: (1) ①先证充分性 (如果一个函数的图象关于 y 轴对称, 则这个函数为偶函数.)

设函数 $y=f(x)$ ，在函数图象上取两点 $(x, f(x))$ ， $(-x, f(-x))$ 。

因为函数的图象关于 y 轴对称，

所以横坐标互为相反数的两个点的纵坐标应该相等，即 $f(x)=f(-x)$ ，

所以函数 $y=f(x)$ 为偶函数。

②再证必要性（如果一个函数是偶函数，那么它的图象关于 y 轴对称。）

设 $y=f(x)$ 是偶函数，

要证明图象关于 y 轴对称，

即证明图象上任意一点关于 y 轴的对称点还在自身图象上，

设 $P(x, y)$ 为 $f(x)$ 图象上任意一点，则 $y=f(x)$ ，

此时 P 关于 y 轴的对称点 $P'(x', y')$ ，

则 $x'=-x$ ， $y'=y$ ，

又函数 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)=f(-x)$ ，即 $y=f(x)=f(-x)=y'$ ，

所以点 $P'(x', y')$ 在函数 $f(x)$ 图象上。

所以函数 $y=f(x)$ 是偶函数的充要条件是它的图象关于 y 轴对称。

(2) $g(x)=(x+1)^4-1$ ，

设 $x=a$ 为 $g(x)$ 的对称轴，

由题意， $g(x+a)=(x+1+a)^4-1$ 为偶函数。

任取 $x \in \mathbf{R}$ ， $g(x+a)=g(-x+a)$ ，

所以 $(x+1+a)^4-1=(-x+1+a)^4-1$ ，

所以 $[(x+1+a)^2+(x-1-a)^2] \cdot [(x+1+a)^2-(x-1-a)^2]=0$ ，

所以 $[(x+1+a)^2+(x-1-a)^2] \cdot 4(1+a)x=0$ 恒成立，

故 $1+a=0$ ，则 $a=-1$ ，

所以 $g(x)$ 的对称轴为直线 $x=-1$ 。

(3) 因为函数 $y=h(x+2)$ 为偶函数，且 $y=h(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减，

所以 $|m-2| < |1-2m-2|$ ，

解得 $m < -3$ 或 $m > \frac{1}{3}$ ，

所以 m 的取值范围 $(-\infty, -3) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ 。