

无锡市辅仁高级中学 2022-2023 学年度第二学期期末考试

高一数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若 $z(1-i)=(1+i)^2$ ，则在复平面内复数 z 对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 两个粒子 A, B 从同一发射源发射出来，在某一时刻，它们的位移分别为 $\vec{s}_A=(4,3)$ ， $\vec{s}_B=(-2,6)$ ，则 $\vec{s}_B$ 在 $\vec{s}_A$ 上的投影向量的长度为 ()

- A. 10 B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. 2

3. 若一个样本容量为 8 的样本的平均数为 5，方差为 2. 现样本中又加入一个新数据 5，此时样本容量为 9，平均数为 $\bar{x}$ ，方差为 s^2 ，则 ()

- A. $\bar{x}=5$ ， $s^2>2$ B. $\bar{x}=5$ ， $s^2<2$ C. $\bar{x}>5$ ， $s^2<2$ D. $\bar{x}>5$ ， $s^2>2$

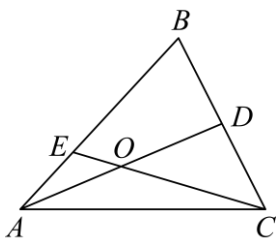
4. 抛掷两枚质地均匀的硬币，设事件 A ="第一枚硬币正面朝上"，事件 B ="第二枚硬币正面朝上".下列结论正确的是 ()

- A. A 与 B 互为对立事件 B. A 与 B 互斥
C. A 与 B 相等 D. $P(A)=P(B)$

5. 四棱台 $ABCD-EFGH$ 中，其上、下底面均为正方形，若 $EF=2AB=8$ ，且每条侧棱与底面所成角的正切值均为 $3\sqrt{2}$ ，则该棱台的体积为 ()

- A. 224 B. 448 C. $\frac{224}{3}$ D. 147

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 为 BC 边的中点， O 为线段 AD 的中点，连接 CO 并延长交 AB 于点 E ，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ ，则 $\overrightarrow{CE}=(\quad)$



A. $\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$

B. $\frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$

C. $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$

D. $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, CD 为角 C 的平分线, 若 $B = 2A$, $3AD = 4BD$, 则 $\cos A$ 等于 ()

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

8. 中国古建筑闻名于世, 源远流长. 如图 1 所示的五脊殿是中国传统建筑中的一种屋顶形式, 该屋顶的结构示意图如图 2 所示, 在结构示意图中, 已知四边形 $ABCD$ 为矩形, $EF \parallel AB$, $AB = 2EF = 2$,

$\triangle ADE$ 与 $\triangle BCF$ 都是边长为 1 的等边三角形, 若点 A, B, C, D, E, F 都在球 O 的球面上, 则球 O 的表面积为 ()



图1

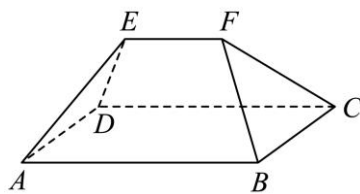


图2

A. $\frac{11\pi}{8}$

B. $\frac{11\pi}{6}$

C. $\frac{11\pi}{4}$

D. $\frac{11\pi}{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知复数 z_1, z_2 , $\overline{z_1}$ 为 z_1 的共轭复数, 则下列结论中一定成立的是 ()

A. $z_1 + \overline{z_1}$ 实数

B. 若 $|z_1| = |z_2|$, 则 $z_1 = \pm z_2$

C. $|z_2 \overline{z_1}| = |z_2 z_1|$

D. 若 $|z_1| = 1$, 则 $|z_1 + 1 - i|$ 的最小值为 $\sqrt{2} - 1$

10. 下列说法正确的是 ()

A. 用简单随机抽样的方法从含有 50 个个体的总体中抽取一个容量为 5 的样本, 则个体 m 被抽到的概率是 0.1

B. 已知一组数据 1, 2, 3, 3, 4, 5 的众数大于中位数

C. 数据 27, 12, 14, 30, 15, 17, 19, 23 的第 70 百分位数是 21

D. 甲乙丙三种个体按 3:1:2 的比例分层抽样, 如果抽取的甲个体数为 9, 则样本容量为 18

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 则下列说法正确的是 ()

A. $a = b \cos C + c \cos B$

B. 若 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, 且 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 为等边三角形

C. 若 $\sin 2A = \sin 2B$, 则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形

D. 若 $a = 2\sqrt{3}, b = 4$, 要使满足条件的三角形有且只有两个, 则 $A \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4, 点 E, F, G, M 分别是 BC, AA_1, C_1D_1, BB_1 的中点则

()

A. 直线 A_1G, EF 是异面直线

B. 平面 DMC_1 截正方体所得截面的面积为 $12\sqrt{2}$

C. 三棱锥 $A-MC_1D_1$ 体积为 $\frac{16}{3}$

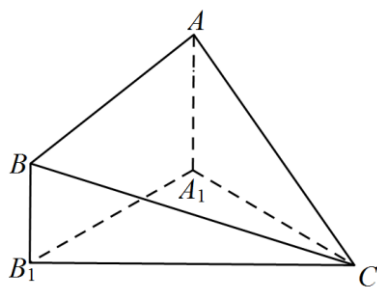
D. 三棱锥 A_1-BDC_1 的内切球的体积为 $\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 圆锥侧面展开图扇形的圆心角为 60° , 底面圆的半径为 6, 则圆锥的侧面积为_____.

14. 某种饮料每箱装 6 听，其中有 1 听不合格，质检人员从中随机抽出 2 听，检测出不合格品的概率为_____.

15. 神舟十三号飞船于 2022 年 4 月 16 日首次实施快速返回技术成功着陆. 若由搜救地面指挥中心的提供信息可知：在东风着陆场搜索区域内， A 处的返回舱垂直返回地面. 空中分队和地面分队分别在 B 处和 C 处，如图为其示意图，若 A, B, C 在同一水平面上的投影分别为 A_1, B_1, C ，且在 C 点测得 B 的仰角为 26.6° ，在 C 点测得 A 的仰角为 45° ，在 B 点测得 A 的仰角为 26.6° ， $BB_1 = 7$ km, $\angle B_1A_1C = 120^\circ$. 则 CA_1 的长为_____km. (参考数据： $\tan 26.6^\circ \approx \frac{1}{2}$)



16. 大约在公元 222 年，赵爽为《周髀算经》一书作序时介绍了“勾股圆方图”，亦称“赵爽弦图”（如图 1）. 某数学兴趣小组类比“赵爽弦图”构造出图 2： $\triangle ABC$ 为正三角形， AD, BE, CF 围成的 $\triangle DEF$ 也为正三角形. 若 D 为 BE 的中点，① $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为_____；②设 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ ，则 $\lambda + \mu =$ _____.

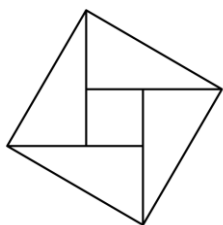


图1

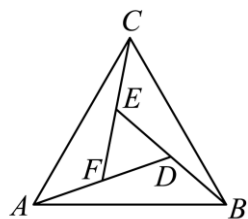


图2

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

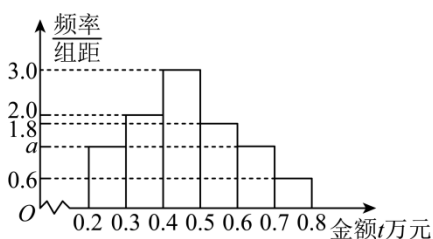
17. 已知复数 $z_1 = a + i$, $z_2 = 1 - ai$, 其中 i 是虚数单位, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $z_1 \cdot z_2$ 为纯虚数, 求 a 的值;

(2) 若 $z_1^2 + 2z_1 + 2 = 0$, 求 $\frac{z_1}{z_2}$ 的虚部.

18. 某大型连锁超市随机抽取了 100 位客户, 对去年到该超市消费情况进行调查. 统计, 这 100 位客户去年到该超市消费金额 (单位: 万元) 均 区间 $[0.2, 0.8]$ 内, 按

$[0.2, 0.3], (0.3, 0.4], (0.4, 0.5], (0.5, 0.6], (0.6, 0.7], (0.7, 0.8]$ 分成 6 组, 其频率分布直方图如图所示.



(1) 求频率分布直方图中 a 的值, 并估计样本中消费金额的中位数 (中位数精确到 0.01);

(2) 求出这 100 位客户最近一年到该超市消费金额的平均数 (同一组中的数据以这组数据所在范围的组中值作代表).

19. 甲、乙两人进行摸球游戏, 游戏规则是: 在一个不透明的盒子中装有质地、大小完全相同且编号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 个球, 甲先随机摸出一个球, 记下编号, 设编号为 a , 放回后乙再随机摸出一个球, 也记下编号, 设编号为 b , 记录摸球结果 (a, b) , 如果 $a + b > 5$, 算甲赢, 否则算乙赢.

(1) 求 $a + b = 5$ 的概率;

(2) 这种游戏规则公平吗? 请说明理由.

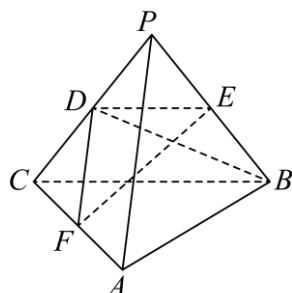
20. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(1) 求向量 $\vec{b}$ 和 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角的余弦值;

(2) 设向量 $\vec{x} = \vec{a} + (t^2 - 3)\vec{b}$, $\vec{y} = -k\vec{a} + (t + 2)\vec{b}$, 是否存在正实数 k , 使得 $\vec{x} \perp \vec{y}$? 如果存在, 求出 t

的取值范围；如果不存在，请说明理由.

21. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PBC \perp$ 平面 ABC ， $\triangle PBC$ 为等边三角形， D, E 分别为 PC, PB 的中点， $BD \perp PA$ ， $BC = 2$ ， $AC = 1$.



(1) 求证： $AC \perp$ 平面 PBC ；

(2) 在线段 AC 上是否存在点 F ，使得平面 DEF 与平面 ABC 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，若存在，求出 CF 的长；若不存在，请说明理由.

22. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}$.

(1) 若 $C = \frac{\pi}{4}$ ，求 A, B ；

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，求 $\frac{a}{b \cos^2 B}$ 取值范围.