

江苏省无锡市第一中学 2019 届高三 2 月数学测试卷含附加题

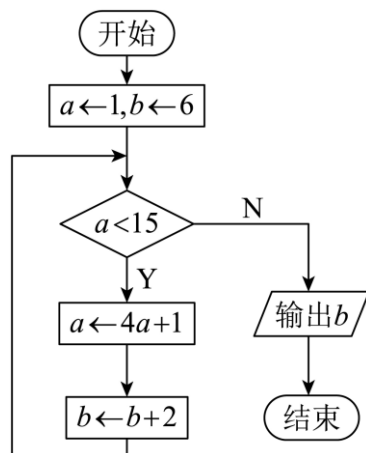
一、填空题：本大题共 14 个小题，每小题 5 分，共 70 分.请把答案写在答题卡相应位置上.

1. 已知集合 $M = \{-1, 1\}$, $N = \left\{x \mid \frac{1}{2} < 2^{x+1} < 4, x \in \mathbb{Z}\right\}$, 则 $M \cap N =$ _____.

2. 复数 $z = (1-i)i$ (i 为虚数单位) 的共轭复数为_____.

3. 某高一学生在确定选修地理 情况下, 想从历史、政治、化学、生物、物理中再选择两科进行学习, 在所选的两科中有生物的概率是_____.

4. 如图是一个算法流程图, 则输出的 b 的值为_____.



5. 已知 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

6. 已知正四棱柱的底面边长为 3cm , 侧面的对角线长是 $3\sqrt{5}\text{cm}$, 则这个正四棱柱的体积是_____ cm^3 .

7. 在平面直角坐标系中, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\overrightarrow{AB} = (1, -2)$, $\overrightarrow{AD} = (2, 1)$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $y = 3x + t$ 与曲线 $y = a \sin x + b \cos x$ ($a, b, t \in \mathbb{R}$) 相切于点 $(0, 1)$, 则 $(a+b)t$ 的值为_____.

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n > 0$, 若 $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 500$, 则 $a_{50} \cdot a_{51}$ 最大值_____.

10. 已知 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} y \geq x+1 \\ y \leq -\frac{1}{2}x+4 \\ x \geq 1 \end{cases}$, 则 $z = \frac{y}{x+2}$ 的取值范围是_____.

11. 设双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 右顶点为 A , 右焦点为 F , 过点 F 且与双曲线的一条渐近线平行的直线与另一条渐近线交于点 B , 则 $\triangle AFB$ 的面积为_____.

12. 已知 a, b 为正实数, 函数 $f(x) = ax^3 + bx + 2^x$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 4, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上的最小值为_____.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(1,1), B, C$ 为圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上的两动点, 且 $BC = 2\sqrt{3}$, 若圆 O 上存在点 P , 使得 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{OP}, m > 0$, 则正数 m 的取值范围为_____.

14. 已知 $a, b, c, d \in R$ 且满足 $\frac{a+3\ln a}{b} = \frac{d-3}{2c} = 1$, 则 $(a-c)^2 + (b-d)^2$ 的最小值为_____.

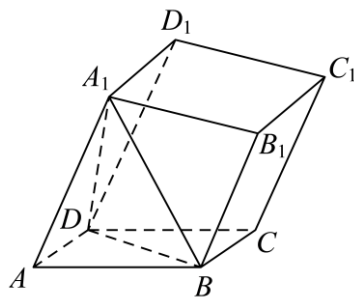
二、解答题: 本大题共 6 小题, 共 90 分. 请在答题卡制定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 在斜三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .

(1) 若 $2\sin A \cos C = \sin B$, 求 $\frac{a}{c}$ 值;

(2) 若 $\sin(2A+B) = 3\sin B$, 求 $\frac{\tan A}{\tan C}$ 的值.

16. 如图, 在六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \parallel CC_1$, $A_1B = A_1D$, $AB = AD$. 求证:



(1) $AA_1 \perp BD$;

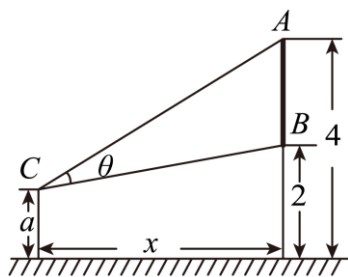
(2) $BB_1 \parallel DD_1$.

17. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点分别为 $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 过焦点 F_2 的直线 l (斜率不为 0) 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 D , O 为坐标原点, 直线 OD 交椭圆于 M, N 两点.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 当四边形 MF_1NF_2 为矩形时, 求直线 l 的方程.

18. 如图, 墙上有一壁画, 最高点 A 离地面 4 米, 最低点 B 离地面 2 米, 观察者从距离墙 $x(x > 1)$ 米, 离地面高 $a(1 \leq a \leq 2)$ 米的 C 处观赏该壁画, 设观赏视角 $\angle ACB = \theta$.



- (1) 若 $a = 1.5$, 问: 观察者离墙多远时, 视角 θ 最大?
- (2) 若 $\tan \theta = \frac{1}{2}$, 当 a 变化时, 求 x 的取值范围.
19. 已知函数 $f(x) = x^2 + bx + c (b, c \in \mathbb{R})$, 并设 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$,
- (1) 若 $F(x)$ 图像在 $x = 0$ 处的切线方程为 $x - y = 0$, 求 b, c 的值;
- (2) 若函数 $F(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 则
- ① 当 $x \geq 0$ 时, 试判断 $f(x)$ 与 $(x + c)^2$ 的大小关系, 并证明之;
- ② 对满足题设条件 任意 b, c , 不等式 $f(c) - Mc^2 \leq f(b) - Mb^2$ 恒成立, 求 M 的取值范围
20. 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 $d (d \neq 0)$ 的等差数列, 它的前 n 项和记为 A_n , 数列 $\{b_n\}$ 是公比为 $q (q \neq 1)$ 的等比数列, 它的前 n 项和记为 B_n . 若 $a_1 \neq b_1 \neq 0$, 且存在不小于 3 的正整数 k, m , 使 $a_k = b_m$.
- (1) 若 $a_1 = 1, d = 2, q = 3, m = 4$, 求 A_k .
- (2) 若 $a_1 = 1, d = 2$ 试比较 A_{2k} 与 B_{2m} 的大小, 并说明理由;
- (3) 若 $q = 2$, 是否存在整数 m, k , 使 $A_k = 86B_m$ 若存在, 求出 m, k 的值; 若不存在, 说明理由.
21. [选修 4-2: 矩阵与变换] 已知矩阵 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, 且 $(MN)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵 M .
22. 在极坐标系中, 设直线 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 与曲线 $\rho^2 - 10\rho \cos \theta + 4 = 0$ 相交于 A, B 两点, 求线段 AB 中点的极坐标.

23. “回文数”是指从左到右与从右到左读都一样的正整数，如 22，121，3553 等. 显然 2 位“回文数”共 9 个：11，22，33， $\dots$ ，99. 现从 9 个不同 2 位“回文数”中任取 1 个乘以 4，其结果记为 X ；从 9 个不同 2 位“回文数”中任取 2 个相加，其结果记为 Y .

(1) 求 X 为“回文数”的概率；

(2) 设随机变量 ξ 表示 X, Y 两数中“回文数”的个数，求 ξ 的概率分布和数学期望 $E(\xi)$.

24. 设 $n \geq 3$, $n \in N^*$, 在集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的所有元素个数为 2 的子集中, 把每个子集的较大元素相加, 和记为 a , 较小元素之和记为 b .

(1) 当 $n=3$ 时, 求 a, b 的值;

(2) 求证: 为任意的 $n \geq 3$, $n \in N^*$, $\frac{b}{a}$ 为定值

