

江苏省南菁高级中学 2016—2017 学年度第一学期 12 月质量检测试卷

高三数学

1. 本试卷共 4 页，包括填空题（第 1 题～第 14 题）、解答题（第 15 题～第 20 题）两部分。本试卷满分 160 分，考试时间 120 分钟。

2. 答题时，必须用书写黑色字迹的 0.5 毫米签字笔写在试卷的指定位置，在其它位置作答一律无效。

3. 如有作图需要，可用 2B 铅笔作答，并请加黑加粗，描写清楚。

一、填空题：（本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分。请将答案填写在答题卡相应位置上。）

1. 设 A, B 是非空集合，定义 $A \times B = \{x | x \in A \cup B \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$ 。已知

$$A = \{x | y = \sqrt{2x - x^2}\}, B = \{y | y = 2^x, x > 0\}, \text{ 则 } A \times B = \underline{\hspace{2cm}} \blacktriangle.$$

2. 已知 $0 < a < 2$ ，复数 z 的实部为 a ，虚部为 1，则 $|z - 1 - 3i|$ 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}} \blacktriangle$ 。

3. 右图是一个算法流程图，则输出的 S 的值是 $\underline{\hspace{2cm}} \blacktriangle$ 。

4. 命题 p : 函数 $y = \tan x$ 在 R 上单调递增，命题 q : $\triangle ABC$ 中， $\angle A > \angle B$ 是 $\sin A > \sin B$

的充要条件，则 $p \vee q$ 是 $\underline{\hspace{2cm}} \blacktriangle$ 命题。（填“真”“假”）

5. 设 a, b 为空间的两条直线， α, β 为空间的两个平面，给出下列命题：

(1) 若 $a // \alpha, a // \beta$ ，则 $\alpha // \beta$ ；(2) 若 $a \perp \alpha, a \perp \beta$ ，则 $\alpha // \beta$ ；

(3) 若 $a // \alpha, b // \alpha$ ，则 $a // b$ ；(4) 若 $a \perp \alpha, b \perp \alpha$ ，则 $a // b$ 。

上述命题中，所有真命题的序号是 $\underline{\hspace{2cm}} \blacktriangle$ 。

6. 在不等式组
$$\begin{cases} y \leq x \\ 0 < x \leq 3 \\ y > \frac{1}{x} \end{cases}$$
 所表示的平面区域内的所有格点（横、纵坐标均为整数的点称为格点）

中任取 3 个点，则该 3 点恰能作为一个三角形的三个顶点的概率为 $\underline{\hspace{2cm}} \blacktriangle$ 。

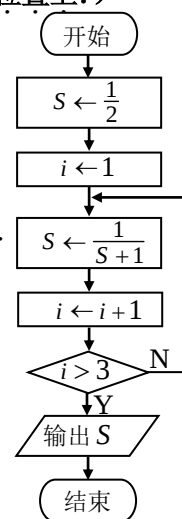
7. 设 $0 < \omega < 4$ ，函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象若向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位所得的图象与原图象重合，

若向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位所得到的图象关于 y 轴对称，则 $\tan(\omega\varphi)$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}} \blacktriangle$ 。

8. 已知 $a > b > 1$ 且 $2\log_a b + 3\log_b a = 7$ ，则 $a + \frac{1}{b^2 - 1}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}} \blacktriangle$ 。

9. 已知 $\triangle ABC$ 的边 BC 的垂直平分线交 AC 于点 P ，交 BC 于点 Q 。若 $|\overrightarrow{AB}| = 3, |\overrightarrow{AC}| = 5$ ，则

$(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}} \blacktriangle$ 。



（第 3 题图）

10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n = 4 + (-\frac{1}{2})^{n-1}$, 若对任意 $n \in \mathbb{N}^*$,

都有 $1 \leq p(S_n - 4n) \leq 3$, 则实数 p 的取值范围是 ▲ .

11. 已知 $\triangle ABC$, 若存在 $\triangle A_1B_1C_1$, 满足 $\frac{\cos A}{\sin A_1} = \frac{\cos B}{\sin B_1} = \frac{\cos C}{\sin C_1} = 1$, 则称 $\triangle A_1B_1C_1$ 是 $\triangle ABC$ 的一个“南

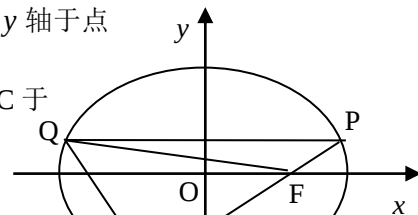
菁”三角形. 若等腰 $\triangle ABC$ 存在“南菁”三角形, 则其底角的弧度数为 ▲ .

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 过点 F 的直线交 y 轴于点

N , 交椭圆 C 于点 A, P (P 在第一象限), 过点 P 作 y 轴的垂线交椭圆 C 于

另外一点 Q . 若 $\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{FP}$. 若 $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{FP}$ 且 $\triangle APQ$ 的面积为 $\frac{12\sqrt{15}}{5}$,

则椭圆 C 的方程为 ▲ .



13. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[1, +\infty)$ 上的函数, 且 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x - 3|, & 1 \leq x < 3 \\ \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x), & x \geq 2 \end{cases}$ 则函数

$y = 2x f(x)$ 在区间 $(1, 2017)$ 上的零点个数为 ▲ .

14. 若实数 x, y 满足 $\log_3[2\cos^2(xy) + \frac{1}{8\cos^2(xy)}] - \ln y + \frac{y}{3} - \ln \frac{e}{3} = 0$, 其中 e 为自然对数的底

数, 则 $(\cos 6x)^y$ 的值为 ▲ .

二、解答题: (本大题共 6 小题, 共计 90 分. 请在答题纸指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

15. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\cos^2 \omega x + \sin \omega x \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 的周期为 π .

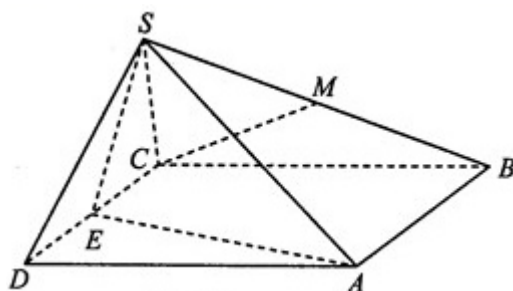
(1) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 对应的边分别为 a, b, c , 若 $f(\frac{A}{2}) = \sqrt{3}$, 且 $a = 4, b + c = 5$,

求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧面 SAB 是等边三角形, 侧面 SCD 是以 CD 为斜边的直角三角形, E 为 CD 的中点, M 为 SB 的中点.

(1) 求证: $CM \parallel$ 平面 SAE (2) 求证: $SE \perp$ 平面 SAB



(3) 求三棱锥 $S-AED$ 的体积;

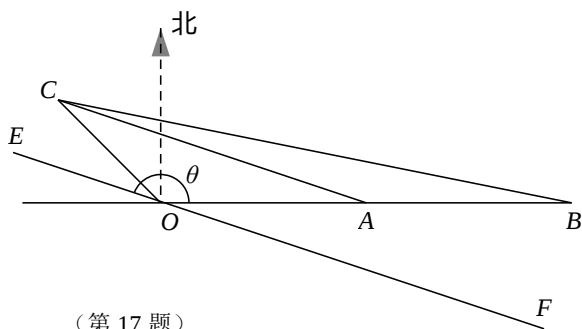
17. 如图, O 为总信号源点, A, B, C 是三个居民区, 已知 A, B 都在 O 的正东方向上, $OA = 10 \text{ km}$, $OB = 20 \text{ km}$, C 在 O 的北偏西 45° 方向上, $CO = 5\sqrt{2} \text{ km}$.

(1) 求居民区 A 与 C 的距离;

(2) 现要经过点 O 铺设一条总光缆直线 EF (E 在直线 OA 的上方), 并从 A, B, C 分别铺设三条最短分光缆连接到总光缆 EF . 假设铺设每条分光缆的费用与其长度的平方成正比, 比例系数为 m (m 为常数). 设 $\angle AOE = \theta$ ($0 \leq \theta < \pi$), 铺设三条分光缆的总费用为 w (元).

① 求 w 关于 θ 的函数表达式;

② 求 w 的最小值及此时 $\tan \theta$ 的值.



(第 17 题)

18. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均为各项都不相等的数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,

$$a_{n+1}b_n = S_n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

(1) 若 $a_1 = 1, b_n = \frac{n}{2}$, 求 a_4 的值;

(2) 若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 求证: 存在实数 λ , 使得 $\{b_n + \lambda\}$ 为等比数列;

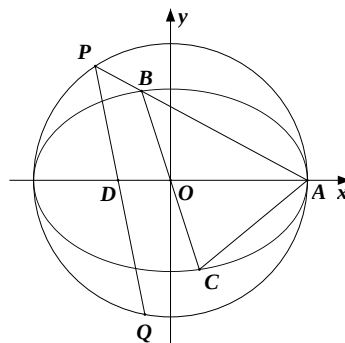
(3) 若 $\{a_n\}$ 的各项都不为零, $\{b_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 求证: $a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 成等差数列的充要条件是 $d = \frac{1}{2}$.

19. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, A 为椭圆右顶点. 过原点 O 且异于坐标轴的直线与椭圆 C 交于 B, C 两点, 直线 AB 与圆 O 的另一交点为 P , 直线 PD 与圆 O 的另一交点为 Q , 其中 $D(-\frac{6}{5}, 0)$. 设直线 AB, AC 的斜率分别为 k_1, k_2 .

(1) 求 $k_1 k_2$ 的值;

(2) 记直线 PQ, BC 的斜率分别为 k_{PQ}, k_{BC} , 是否存在常数 λ , 使得 $k_{PQ} = \lambda k_{BC}$? 若存在, 求 λ 值; 若不存在, 说明理由;

(3) 求证: 直线 AC 必过点 Q .



20. 已知函数 $f(x) = \ln x$

(1) 若直线 $y = ax + b$ 是函数 $f(x) = \ln x$ 图象的切线, 求 $a + b$ 的最小值;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - mx (m \geq \frac{5}{2})$ 的极值点 x_1, x_2 恰好是函数 $h(x) = f(x) - cx^2 - bx$ 的零点, 求 $y = (x_1 - x_2)h'(\frac{x_1 + x_2}{2})$ 的最小值

(3) 是否存在实数 a , 使得 $f(\frac{2a}{x}) \cdot f(e^{ax}) + f(\frac{x}{2a}) \leq 0$ 对任意正实数 x 恒成立? 若存在, 求出满足条件的实数 a ; 若不存在, 请说明理由.

江苏省南菁高级中学 2016—2017 学年度第一学期 12 月质量检测试卷

理 科 附 加 题

21. (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分。请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

B. 选修 4—2: 矩阵与变换

已知矩阵 $M = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ 满足: $M\alpha_i = l_i \alpha_i$, 其中 $l_i (i=1,2)$ 是互不相等的实常数, $\alpha_i (i=1,2)$

是非零的平面列向量, $l_1 = 1$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 求矩阵 M .

C. 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知极坐标的几点与还洗脚坐标系的原点重合, 极轴与 x 轴个正半轴重合, 若直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2}$.

(1) 把直线 l 的极坐标方程化为直角坐标系方程;

(2) 已知 P 为曲线 $C: \begin{cases} x = 4\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数})$ 上一点, 求 P 到直线 l 的距离的最大值。

22. (本小题满分 10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, F 为其焦点, 点 E 的坐标为 $(2, 0)$, 设 M 为抛物线 C 上异于顶点的动点, 直线 MF 交抛物线 C 于另一点 N , 链接 ME , NE 并延长分别交抛物线 C 与点 P, Q .

(1) 当 $MN \perp Ox$ 时, 求直线 PQ 与 x 轴的交点坐标;

(2) 当直线 MN, PQ 的斜率存在且分别记为 k_1, k_2 时, 求证: $k_1 = 2k_2$.

23. (本小题满分 10 分)

设集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, 集合 $A_n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) | x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\}$, 集合 A_n 中满足条件 “ $1 \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq m$ ” 的元素个数记为 S_m^n .

(1) 求 S_2^2 和 S_2^4 的值;

(2) 当 $m < n$ 时, 求证: $S_m^n < 3^{n+1} + 2^{m+1} - 2^{n+1}$.

