

江苏省无锡辅仁高级中学 2019—2020 学年高二下学期期中考试

数学试题

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{x | 1 < 2^x < 4\}$, 则 $A \cap B =$ ()
- A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{1\}$ C. $\{-1, 1\}$ D. $\{0, 1\}$
2. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 则 “ $x = y$ ” 是 “ $|x+3| = |y+3|$ ” 的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 则双曲线的渐近线方程为 ()
- A. $y = \pm 2x$ B. $y = \pm \sqrt{2}x$ C. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ D. $y = \pm \frac{1}{2}x$
4. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 所对边, 若 $a = 2b \cos C$, 则此三角形一定是 ()
- A. 等腰直角三角形 B. 直角三角形
- C. 等腰三角形 D. 等腰或直角三角形
5. 已知 $a = \log_3 \frac{9}{2}$, $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{6}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$
6. 已知 $(1-3x)^9 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_9x^9$, 则 $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_9|$ 等于 ()
- A. 2^9 B. 4^9 C. 3^9 D. 1
7. 若 x_0 是方程 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^{\frac{1}{3}}$ 的解, 则 x_0 属于区间 ()
- A. $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ C. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$
8. 已知函数 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ 的图象向左平移 $\varphi \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 个单位后, 其图象关于 y 轴对称, 则 φ 的值为 ()

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

9. 已知双曲线的中心在原点，离心率为 $\sqrt{3}$ ，若它的一条准线与抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线重合，则该双曲线与抛物线 $y^2 = 4x$ 的交点到原点的距离是（ ）

- A. $2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ B. $\sqrt{21}$ C. $18 + 12\sqrt{2}$ D. 21

10. 已知函数 $h(x) = \frac{m}{e^x} + e^x$ 在区间 $[0, 1]$ 上不单调，则实数 m 的取值范围为（ ）

- A. $[1, e]$ B. $(1, e)$ C. $[1, e^2]$ D. $(1, e^2)$

11. 从 5 位男教师和 4 位女教师中选出 3 位教师，派到 3 个班担任班主任（每班 1 位班主任），要求这 3 位班主任中男、女教师都要有，则不同的选派方案共有（ ）

- A. 210 种 B. 420 种 C. 630 种 D. 840 种

12. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2$ ， D, E 分别是边 AB ， AC 的中点， CD 与 BE 交于点 O ，若 $OC = \sqrt{3}OB$ ，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为（ ）

- A. $\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{3}$ C. $6\sqrt{3}$ D. $9\sqrt{3}$

二、填空题

13. 已知 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = e^{3x}$ ，则 $f(-\ln 2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 若对于任意的实数 x ，有 $x^3 = a_0 + a_1(x-3) + a_2(x-3)^2 + a_3(x-3)^3$ ，则 $a_1 + a_2 + a_3$ 的值为_____.

15. 已知正实数 x, y 满足 $x + 3y = 9$ ，则 $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 的最大值是_____.

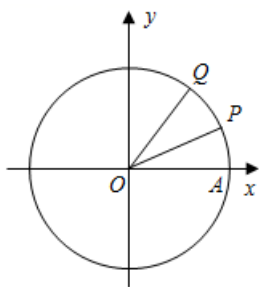
16. 规定，若函数 $f(x)$ 在定义域 $[m, n]$ ($1 < m < n$) 上的值域是 $[m^3, n^3]$ ，则称该函数为“绅士风度”函数. 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 为“绅士风度”函数，则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

17. 如图，设点 A 是单位圆 O 和 x 轴正半轴的交点， O 是坐标原点， P, Q 是单位圆上的两点， $\angle AOP = \frac{\pi}{6}$ ， $\angle AOQ = \alpha$ ， $\alpha \in [0, \pi)$.

(1) 求 $Q\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ，求 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值；

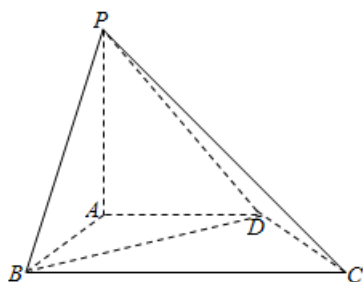
(2) 设函数 $f(\alpha) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ ，求 $f(\alpha)$ 的值域.



18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AP = AB = AD = 1$ ， $AB \perp AD$ ， $AD \parallel BC$.

(1) 若直线 PB 与 CD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$ ，求 BC 的长；

(2) 求二面角 $B-PD-A$ 的余弦值.



19. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $a = b \cos C + c \sin B$.

(1) 求 B 的值；

(2) 已知 $b = \sqrt{2}$ ， $c = \sqrt{3}$ ，求 a .

20. 将名为《高等代数》、《数学分析》、《概率论》和《复变函数》的 4 本不同的书随机放入甲、乙、丙、丁 4 个书包中.

(1) 求 4 本书恰好放在 4 个不同书包中的概率；

(2) 随机变量 X 表示放在丙书包中书的本数，求 X 的概率分布和数学期望 $E(X)$.

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ， $A(a, 0)$ ， $B(0, b)$ ， $O(0, 0)$ ，若 $\triangle OAB$ 的面积为 1，且过右

焦点 F 垂直于 x 轴的直线被椭圆 C 截得的线段长为 1.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设 P 是椭圆 C 上一点，直线 PA 与 y 轴交于点 M ，直线 PB 与 x 轴交于点 N ，试问 $AN \cdot BM$ 是否为定值，若是，求出该定值，若不是，请说明理由.

22. 已知函数 $f(x) = mx^{-1} \ln x + n$.

(1) 若 $m = 1$ ， $n = 0$ ，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若 $m = 1$ ， $n = 1$ ，求函数 $f(x)$ 在区间 $[2a, 4a]$ 上的最小值；

(3) 某高二学习研究小组通过研究发现：总存在正实数 $a, b (a < b)$ ，使等式 $a^b = b^a$ 成立.试问：他们的研究成果是否确？若正确，请写出 a, b 的取值范围；若不正确，请说明理由.

参考答案

1. B 2. A 3. C 4. C 5. D 6. B 7. C 8. A

9. B 10. D 11. B 12. C

13. -8

14. 37

15. $3\sqrt{2}$

16. $\left(1, e^{\frac{3}{e}}\right)$

17. 解：(1) 由已知可得 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$,

$$\therefore \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{6} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}.$$

(2) 由已知得 $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{OQ} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$,

$$\therefore f(\alpha) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\because \alpha \in [0, \pi), \therefore \alpha + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right),$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1.$$

故 $f(\alpha)$ 的值域是 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.

18. 解：(I) 分别以 AB 、 AD 、 AP 所在直线为 x 、 y 、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.

$$\because AP = AB = AD = 1, \therefore A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), D(0, 1, 0), P(0, 0, 1).$$

设 $C(1, y, 0)$, 则 $\overrightarrow{PB} = (1, 0, -1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1, 1-y, 0)$.

∵ 直线 PB 与 CD 所成角大小为 $\frac{\pi}{3}$,

$$\therefore \left| \cos \langle \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{CD} \rangle \right| = \left| \frac{\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{PB}\| \|\overrightarrow{CD}\|} \right| = \frac{1}{2},$$

即 $\frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{1+(1-y)^2}} = \frac{1}{2}$, 解得 $y=2$ 或 $y=0$ (舍),

∴ $C(1, 2, 0)$, 则 BC 的长为 2;

(II) 设平面 PBD 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$.

$$\therefore \overrightarrow{PB} = (1, 0, -1), \quad \overrightarrow{PD} = (0, 1, -1),$$

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{PB} \cdot \vec{m} = x - z = 0 \\ \overrightarrow{PD} \cdot \vec{m} = y - z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x=1, \text{ 则 } y=1, z=1, \vec{m} = (1, 1, 1).$$

∵ 平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{n} = (1, 0, 0)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{\|\vec{m}\| \|\vec{n}\|} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

∴ 二面角 $B-PD-A$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19. 解: (1) ∵ $a = b \cos C + c \sin B$,

$$\therefore \sin A = \sin B \cos C + \sin C \sin B,$$

$$\text{又 } \therefore \sin A = \sin [\pi - (B + C)] = \sin (B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C,$$

$$\therefore \sin B \cos C + \sin C \sin B = \sin B \cos C + \cos B \sin C, \text{ 即 } \sin C \sin B = \cos B \sin C,$$

∵ $\cos B \sin C \neq 0$, 等是两边同时除以 $\cos B \sin C$ 得

$$\therefore \tan B = 1, \quad 0 < B < \pi, \quad \therefore B = \frac{\pi}{4}.$$

(2) 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

$$\text{得 } 2 = a^2 + 3 - 2\sqrt{3}a \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即 } a^2 - \sqrt{6}a + 1 = 0,$$

$$\text{解得 } a = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2}.$$

20. 解: (1) 将 4 本不同的书放入编号为 1, 2, 3, 4 的四个抽屉中, 共有 $4^4 = 256$ 种不同放法, 记 “4 本

书恰好放在四个不同抽屉中”为事件 A ,

则事件 A 包含 $A_4^4 = 24$ 个基本事件,

$$\therefore P(A) = \frac{24}{256} = \frac{3}{32},$$

$\therefore$ 4 本书恰好放在四个不同抽屉中的概率为 $\frac{3}{32}$.

(2) X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 4,

$$P(X=0) = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256},$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 \times 3^3}{4^4} = \frac{27}{64},$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 \times 3^2}{4^4} = \frac{27}{128},$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3 \times 3}{4^4} = \frac{3}{64},$$

$$P(X=4) = \frac{C_4^4}{4^4} = \frac{1}{256},$$

$\therefore X$ 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{256}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{256}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{81}{256} + 1 \times \frac{27}{64} + 2 \times \frac{27}{128} + 3 \times \frac{3}{64} + 4 \times \frac{1}{256} = 1.$$

21. 解: (I) 由已知, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}ab = 1$, 又 $a^2 = b^2 + c^2$,

解得 $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$. $\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(II) 设椭圆上一点 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$.

直线 PA : $y = \frac{y_0}{x_0 - 2}(x - 2)$, 令 $x = 0$, 得 $y_M = \frac{-2y_0}{x_0 - 2}$.

$$\therefore |BM| = \left| 1 + \frac{2y_0}{x_0 - 2} \right| \quad \text{直线 } PB: y = \frac{y_0 - 1}{x_0}x + 1, \text{ 令 } y = 0, \text{ 得 } x_N = \frac{-x_0}{y_0 - 1}.$$

$$\begin{aligned}
\therefore |AN| &= \left| 2 + \frac{x_0}{y_0 - 1} \right| \\
&= \left| \frac{x_0 + 2y_0 - 2}{x_0 - 2} \right| \cdot \left| \frac{x_0 + 2y_0 - 2}{y_0 - 1} \right| \\
&= \left| \frac{x_0^2 + 4y_0^2 + 4x_0y_0 - 4x_0 - 8y_0 + 4}{x_0y_0 - x_0 - 2y_0 + 2} \right|
\end{aligned}$$

将 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$ 代入上式得 $|AN| \cdot |BM| = 4$ ，故 $|AN| \cdot |BM|$ 为定值.

22. 解：(1) 定义域为 $(0, +\infty)$ ， $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，

令 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$ ，则 $x \in e$ ，

当 x 变化时， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0, e)$	e	$(e, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$	$\square$	$\frac{1}{e}$	$\square$

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $(0, e)$ ；单调减区间为 $(e, +\infty)$ 。

(2) 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增，在 $(e, +\infty)$ 上单调递减，所以，

当 $4a \leq e$ 时，即 $a \leq \frac{e}{4}$ 时， $f(x)$ 在 $[2a, 4a]$ 上单调递增， $\therefore f(x)_{\min} = f(2a)$ ；

当 $2a \geq e$ 时， $f(x)$ 在 $[2a, 4a]$ 上单调递减， $\therefore f(x)_{\min} = f(4a)$

当 $2a < e < 4a$ 时，即 $\frac{e}{4} < a < \frac{e}{2}$ 时， $f(x)$ 在 $[2a, e]$ 上单调递增， $f(x)$ 在 $[e, 4a]$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\min} = \min\{f(2a), f(4a)\}$ 。

下面比较 $f(2a)$ ， $f(4a)$ 的大小，

$\therefore f(2a) - f(4a) = \frac{\ln a}{4a}$ ，

$\therefore$ 若 $\frac{e}{4} < a \leq 1$ ，则 $f(a) - f(2a) \leq 0$ ，此时 $f(x)_{\min} = f(2a) = \frac{\ln 2a}{2a}$ ；

若 $1 < a < \frac{e}{2}$ ，则 $f(a) - f(2a) > 0$ ，此时 $f(x)_{\min} = f(4a) = \frac{\ln 4a}{4a}$ ；

综上得：

当 $0 < a \leq 1$ 时, $f(x)_{\min} = f(2a) = \frac{\ln 2a}{2a}$;

当 $a > 1$ 时, $f(x)_{\min} = f(4a) = \frac{\ln 4a}{4a}$,

(3) 正确, a 的取值范围是 $1 < a < e$

理由如下, 考虑几何意义, 即斜率, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$

又 $\because f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减

$\therefore f(x)$ 的大致图象如图所示

$\therefore$ 总存在正实数 a, b 且 $1 < a < e < b$, 使得 $f(a) = f(b)$, 即 $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$, 即 $a^b = b^a$.