

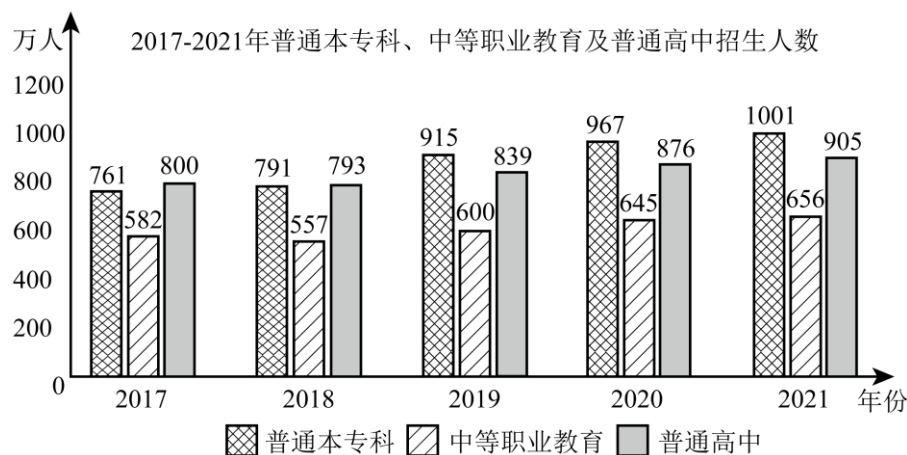
江苏省南菁高级中学高一数学（创新班）10月考试卷

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的. 请将答案填涂到答题卡相应区域

1. 将指数函数的定义域扩大到复数以后，有一个公式： $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ， i 是虚数单位， e 为自然对数的底数. 它建立了三角函数和指数函数的关系，它在复变函数论里非常重要，此公式被誉为“数学中的天桥”. 根据公式可知， $e^{\frac{2\pi}{3}i}$ 表示的复数对应的点位于复平面中的（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 国家统计局公报显示绘制出的 2017-2021 年每年本专科、中等职业教育及普通高中的招生人数（单位：万人）统计图如下图所示，则下列关于 2017-2021 年说法正确的是（ ）



- A. 每年本专科、中等职业教育和普通高中的招生人数都在增长
B. 中等职业教育和普通高中的招生人数差距最大的年份是 2019 年
C. 本专科每年的招生人数增幅最大的年份是 2018 年
D. 本专科的招生人数所占比例最高的年份是 2021 年

3. 已知 α, β 锐角，且 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ， $\tan \beta = \frac{1}{3}$ ，则 $\alpha + \beta =$ （ ）

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

4. 若平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ，两两的夹角相等，且 $|\vec{a}|=1$ ， $|\vec{b}|=1$ ， $|\vec{c}|=3$ ，则 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| =$ （ ）.

- A. 2 B. 4 或 $\sqrt{5}$ C. 5 D. 2 或 5

5. 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $2 \tan \alpha = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta + \sin^2 \beta}$ ，则 $\tan \left(2\alpha + \beta + \frac{\pi}{3}\right) =$ （ ）

- A. $-\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

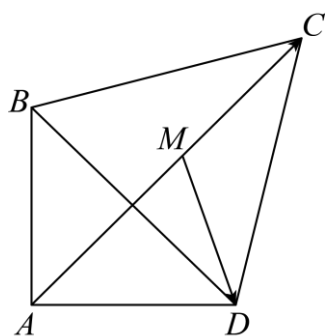
6. 已知 $\triangle ABC$ 中, $A=120^\circ$, $AB=3, AC=4, \overrightarrow{CM}=4\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NB}$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MN} = (\quad)$

- A. $-\frac{12}{5}$ B. $-\frac{7}{5}$ C. $-\frac{2}{5}$ D. $-\frac{1}{5}$

7. 已知 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{5}{6}$, $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = -\frac{1}{4}$, 则 $\alpha + \beta = (\quad)$

- A. $\frac{5}{6}\pi$ B. π C. $\frac{7}{6}\pi$ D. $\frac{11}{6}\pi$

8. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle A=90^\circ$, $AB=AD=2$, $\triangle BCD$ 为等边三角形, 当点 M 在对角线 AC 上运动时, $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ 的最小值为 $(\quad)$



- A. -2 B. $-\frac{3}{2}$ C. -1 D. $-\frac{1}{2}$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 选对但不全的得 3 分, 有选错的得 0 分.

9. 设有下面四个命题, 其中正确的命题是 $(\quad)$

- A. 若复数 z 满足 $\frac{1}{z} \in \mathbf{R}$, 则 $z \in \mathbf{R}$; B. 若复数 z 满足 $z^2 \in \mathbf{R}$, 则 $z \in \mathbf{R}$;
C. 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 z_2 \in \mathbf{R}$, 则 $z_1 = \overline{z_2}$; D. 若数 $z(3+4i) = \frac{4i-3}{(1+i)^2}$, 则 $|z| = \frac{1}{2}$

10. 已知向量 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, 它们的夹角为 60° , 则 $(\quad)$

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ B. $|2\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{3}$
C. $|2\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{3}$ D. 向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夹角为 90°

11. 下列说法正确的有 $(\quad)$

- A. $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, $\sqrt{3} \sin x_0 + \cos x_0 = 3$
B. 不存在无穷多个 α 和 β 的值, 使得 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

C. 存在这样 α 和 β 的值, 使得 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

D. 当 $f(x) = 2\sin x + \cos x$ 取最大值时, $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A 、 B 、 C 所对应边分别为 a 、 b 、 c , 则下列说法正确的是 ()

A. 若 $A > B$, 则 $\cos A < \cos B$

B. 若点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

C. 若 $b = 2$, $A = 30^\circ$ 的三角形有两解, 则 a 的取值范围为 $(1, 2]$

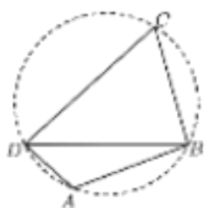
D. 若点 O 为 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则 $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle ABC} = 1:6$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知总体的各个个体的值由小到大依次为 $3, 7, a, b, 17, 20$, 且总体的中位数为 12, 若要使该总体的标准差最小, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$.

14. 已知 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 45° , 求使向量 $2\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a} + 3\vec{b}$ 的夹角是锐角, 则 λ 的取值范围 $\underline{\hspace{1cm}}$.

15. 如图, 位于我国南海海域的某直径为 $5\sqrt{5}$ 海里的圆形海域上有四个小岛, 已知小岛 B 与小岛 C 相距为 5 海里 (小岛的大小忽略不计, 测量误差忽略不计), 经过测量得到数据: $\cos \angle BAD = -\frac{2}{3}$. 小岛 C 与小岛 D 之间的距离为 $\underline{\hspace{1cm}}$ 海里.



16. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| \leq 1$, 且 $|3\vec{b} - 2\vec{a}| \leq 2$. 记 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta$ 的最小值为 $\underline{\hspace{1cm}}$; $|\vec{b}|$ 的最小值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, a , b , c 分别为内角 A , B , C 的对边, 且满

$$(b-a)(\sin B + \sin A) = c(\sqrt{3}\sin B - \sin C).$$

(1) 求 A 的大小;

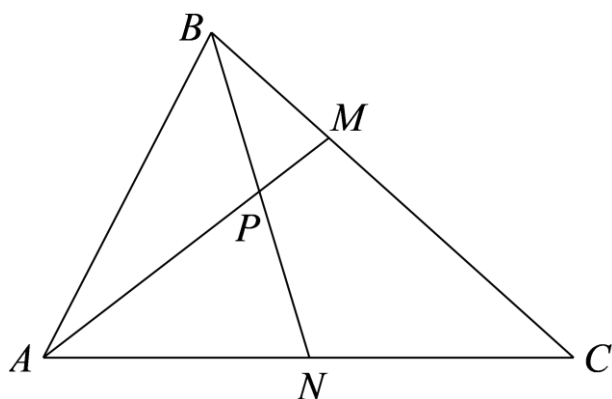
(2) 再在① $a=2$, ② $B=\frac{\pi}{4}$, ③ $c=\sqrt{3}b$ 这三个条件中, 选出两个使 $\triangle ABC$ 唯一确定的条件补充在下面的问题中, 并解答问题. 若 _____, _____, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 已知 α, β 为锐角, $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, $\sin(\alpha - \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\cos 2\alpha$ 的值;

(2) 求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值.

19. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=2, AC=3, \angle BAC=60^\circ$, N 为 AC 边上的中点, 点 M 在线段 BC 上, 且 $CM=2MB$;



(1) 求线段 AM 的长度,

(2) 设 AM 与 BN 相交于点 P , 求 $\angle MPN$ 的余弦值.

20. 需要从一块宽 AB 为 6 米、长 AP 不限的矩形钢板 $PABQ$ 上截取一块直角梯形模板 $EABN$ (E, N 分别在 AP, BQ 上), 且满足腰 AB 上存在点 M , 使得 $\triangle MBN \cong \triangle MEN$. 设 $\angle BNM = \theta$, $AM = t$ 米.

(1) 请用 θ 表示 t ;

(2) 当 AM 的长为多少时, 模板 $EABN$ 的面积 S 最小, 并求这个最小值.

21. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a=6$, P, Q 为边 BC 上两点, $\frac{CP}{BP} = \frac{BQ}{QC} = \frac{AB}{AC} = 2$, $\angle CAQ = \frac{\pi}{3}$.

(1) 求 AQ 的长;

(2) 过线段 AP 中点 E 作一条直线 l , 分别交边 AB, AC 于 M, N 两点, 设 $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}$ ($xy \neq 0$), 求 $x+y$ 的最小值.

22. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 对边分别为 a, b, c . 已知 $\sin A + \sin(C - B) = 2 \sin 2B$, $A = \frac{\pi}{3}$.

(1) 求证: $\triangle ABC$ 是直角三角形;

(2) 已知 $c \neq 2b$, $a = 2\sqrt{3}$, 点 P, Q 是边 AC 上两个动点 (P, Q 不重合), 记 $\angle PBQ = \theta$.

① 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, 设 $\triangle PBQ$ 的面积为 S , 求 S 的最小值;

② 记 $\angle BPQ = \alpha$, $\angle BQP = \beta$. 问: 是否存在实常数 θ 和 k , 对于所有满足题意的 α, β , 都有 $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + k = 4k \sin \alpha \sin \beta$ 成立? 若存在, 求出 θ 和 k 的值; 若不存在, 说明理由.