

2023 年江苏省无锡市锡山区天一中学中考数学四模试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题所给的四个选项中，只有一项是正确的，请用 2B 铅笔把答题卡上相应的选项标号涂黑）

1.（3 分）- 2023 的相反数是（ ）

- A. $-\frac{1}{2023}$ B. - 2023 C. $\frac{1}{2023}$ D. 2023

2.（3 分）下列计算正确的是（ ）

- A. $(a^2b)^2 = a^2b^2$ B. $a^6 \div a^2 = a^3$
C. $(3xy^2)^2 = 6x^2y^4$ D. $(-m)^7 \div (-m)^2 = -m^5$

3.（3 分）2022 年 4 月 16 日，神舟十三号载人飞船圆满完成全部既定任务，顺利返回地球家园．六个月的飞天之旅展现了中国航天科技的新高度．下列航天图标，其文字上方的图案是中心对称图形的是（ ）

- A.  中国探火 B.  中国火箭
C.  中国行星探测 D.  航天神舟

4.（3 分）每天登录“学习强国”App 进行学习，在获得积分的同时，还可获得“点点通”附加奖励，李老师最近一周每日“点点通”收入明细如表，则这组数据的中位数和众数分别是（ ）

星期	一	二	三	四	五	六	日
收入（点）	15	21	27	27	21	30	21

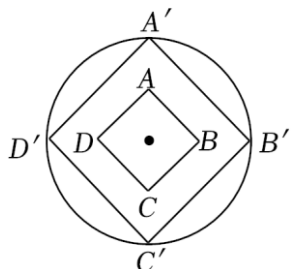


- A. 27 点，21 点 B. 21 点，27 点 C. 21 点，21 点 D. 24 点，21 点

5.（3 分）已知实数 a, b ， $a > b$ ，下列结论中一定正确的是（ ）

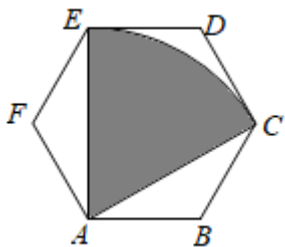
- A. $|a| > |b|$ B. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ C. $a^2 > b^2$ D. $a^3 > b^3$

6. (3分)《墨子·天文志》记载：“执规矩，以度天下之方圆。”度方知圆，感悟数学之美。如图，正方形 $ABCD$ 的面积为 4，以它的对角线的交点为位似中心，作它的位似图形 $A'B'C'D'$ ，若 $AB:A'B' = 1:2$ ，则四边形 $A'B'C'D'$ 的外接圆的半径为 ()



- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4
7. (3分)若关于 x 的方程 $x^2 - x - m = 0$ 有实数根，则实数 m 的取值范围是 ()
- A. $m < \frac{1}{2}$ B. $m \leq \frac{1}{4}$ C. $m \geq -\frac{1}{4}$ D. $m > -\frac{1}{4}$

8. (3分)如图，正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 2，以 A 为圆心， AC 的长为半径画弧，得 $\widehat{EC}$ ，连接 AC ， AE ，则图中阴影部分的面积为 ()

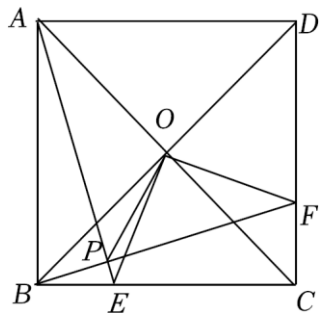


- A. 2π B. 4π C. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$
9. (3分)抛物线 $y = ax^2 - 2ax + c$ (a, c 是常数且 $a \neq 0, c > 0$) 经过点 $A(3, 0)$ 。下列四个结论：
- ①该抛物线一定经过 $B(-1, 0)$;
 - ② $2a + c > 0$;
 - ③点 $P_1(t+2022, y_1), P_2(t+2023, y_2)$ ，在抛物线上，且 $y_1 > y_2$ ，则 $t > -2021$;
 - ④若 m, n ($m < n$) 是方程 $ax^2 + 2ax + c = p$ 的两个根，其中 $p > 0$ ，则 $-3 < m < n < 1$ 。
- 其中正确的个数有 ()

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

10. (3分)如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O ，点 F 是 CD 上一点， $OE \perp$

OF 交 BC 于点 E , 连接 AE , BF 交于点 P , 连接 OP . 则下列结论: ① $AE \perp BF$; ② $\angle OPA = 45^\circ$; ③ $AP - BP = \sqrt{2}OP$; ④ 若 $BE:CE=2:3$, 则 $\tan \angle CAE = \frac{4}{7}$; ⑤ 四边形 $OECF$ 的面积是正方形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$. 其中正确的结论是 ()



- A. ①②④⑤ B. ①②③⑤ C. ①②③④ D. ①③④⑤

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 不需写出解答过程, 请把答案直接填写在答题卡相应的位置上)

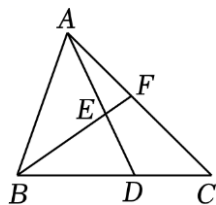
11. (3 分) 分解因式: $a^3 - 4a^2 + 4a =$ _____.

12. (3 分) 在函数 $y = \frac{x}{x-2}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 _____.

13. (3 分) 一粒大米的质量约为 0.000021 千克, 数据 0.000021 用科学记数法可表示为 _____.

14. (3 分) 中国古代数学著作《孙子算经》中有个问题: 今有三人共车, 二车空; 二人共车, 九人步, 问人与车各几何? 这道题的意思是: 今有若干人乘车, 每三人乘一车, 最终剩余 2 辆车, 若每 2 人共乘一车, 最终剩余 9 个人无车可乘, 问有多少人, 多少辆车? 如果我们设有 x 辆车, 则可列方程 _____.

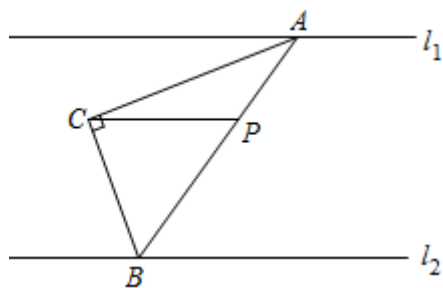
15. (3 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边上一点, 且 $\angle BAD = \angle C$, $\angle ABC$ 的平分线分别交 AD 、 AC 于点 E 、 F , $AB=28$, $BC=36$, 则 $\frac{BE}{EF}$ 的值为 _____.



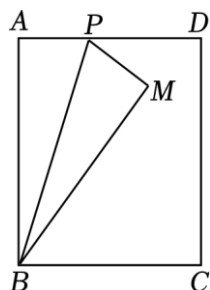
16. (3 分) 已知二次函数 $y = x^2 + 2mx + m$ 的图象与 x 轴交于 $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ 两点, 且满足: $4 \leq a+b \leq 6$. 当 $1 \leq x \leq 3$ 时, 该函数的最大值 H 与 m 满足的关系式是 _____.

17. (3 分) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, P 是斜边 AB 边上一点, 且 $BP=2AP$, 分别过点 A 、 B

作 l_1 、 l_2 平行于 CP ，若 $CP=4$ ，则 l_1 与 l_2 之间的最大距离为 _____.



18. (3分) 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=10$ ， $BC=8$. 点 P 在 AD 上运动 (点 P 不与点 A 、 D 重合) 将 $\triangle ABP$ 沿直线翻折，使得点 A 落在矩形内的点 M 处 (包括矩形边界)，则 AP 的取值范围是 _____，连接 DM 并延长交矩形 $ABCD$ 的 AB 边于点 G ，当 $\angle ABM = 2\angle ADG$ 时， AP 的长是 _____.



三、解答题 (本大题共 10 小题，共 96 分，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤等)

19. (8分) 计算：

(1) $(1-\sqrt{2})^0 - 2\sin 45^\circ + (\sqrt{2})^2$;

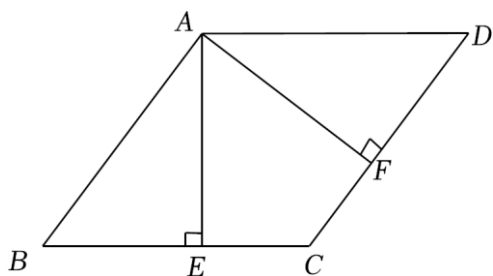
(2) $(1 - \frac{2}{x-1}) \div \frac{x^2-6x+9}{x^2-1}$.

20. (8分) (1) 解方程： $2x(x-2)=1$;

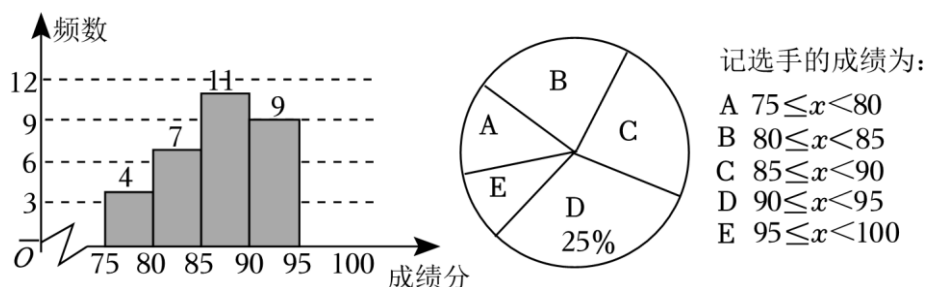
(2) 解不等式组：
$$\begin{cases} 2x+3 > 1 \text{ ①} \\ x-2 \leq \frac{1}{2}(x+2) \text{ ②} \end{cases}$$

21. (10分) 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形， $AE \perp BC$ 于点 E ， $AF \perp CD$ 于点 F .

- (1) 求证： $\triangle ABE \cong \triangle ADF$;
- (2) 若 $AE=4$ ， $CF=2$ ，求菱形的边长.



22. (10 分) “校园音乐之声”结束后, 王老师整理了所有参赛选手的比赛成绩 (单位: 分), 绘制成如图频数分布直方图和扇形统计图:



- (1) 求本次比赛参赛选手总人数, 并补全频数分布直方图;
 - (2) 求扇形统计图中扇形 E 的圆心角度数;
 - (3) 成绩在 E 区域的选手中, 男生比女生多一人, 从中随机选取两人, 请用列表法或画树状图法求恰好选中两名女生的概率.
23. (10 分) 已知: α, β ($\alpha > \beta$) 是一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个实数根, $s_1 = \alpha + \beta$, $s_2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\dots$, $s_n = \alpha^n + \beta^n$.
- (1) 直接写出 s_1, s_2 的值: $s_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $s_2 = \underline{\hspace{2cm}}$;
 - (2) 经计算可得: $s_3 = 4$, $s_4 = 7$, $s_5 = 11$, 当 $n \geq 3$ 时, 请猜想 s_n, s_{n-1}, s_{n-2} 之间满足的数量关系, 并给出证明.
24. (10 分) 请用无刻度的直尺和圆规作图:

- (1) 如图 1, 在 BC 上求作点 D, 使 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$;

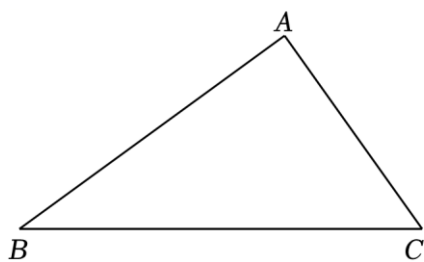


图1

- (2) 如图 2, 若点 D 在 AB 边上, 在 BC 上求作点 E, 使 $S_{\triangle BDE} = S_{\text{四边形 ADEC}}$.

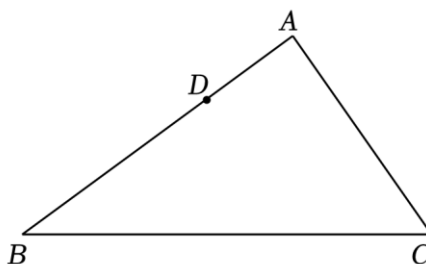


图2

25. (10 分) 如图, 四边形 ABCD 内接于 $\odot O$, $BC = CD$, 点 E 在 AB 的延长线上, $\angle ECB$

$$= \angle DAC.$$

(1) 若 AB 为 $\odot O$ 的直径, 求证: EC 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $CE=7$, $\angle ECB=45^\circ$, $\tan E=\frac{3}{4}$, 求 AD 的长.

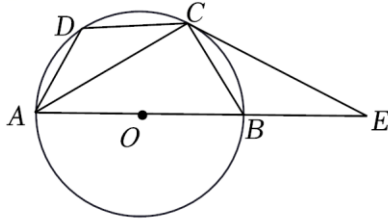


图1

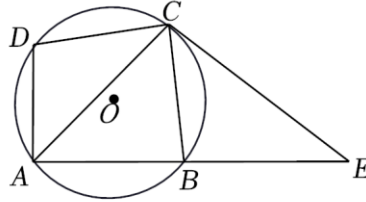


图2

26. (10 分) 某水果店出售一种水果, 每箱定价 58 元时, 每周可卖出 300 箱. 试销发现: 每箱水果每降价 1 元, 每周可多卖出 25 箱; 每涨价 1 元, 每周将少卖出 10 箱. 已知每箱水果的进价为 35 元, 每周每箱水果的平均损耗费为 3 元.

(1) 若不进行价格调整, 这种水果的每周销售利润为多少元?

(2) 根据以上信息, 你认为应当如何定价才能使这种水果的每周销售利润最多?

27. (10 分) 已知抛物线 $y=mx^2 - (1-4m)x+c$ 过点 $(1, a)$, $(-1, a)$, $(0, -1)$.

(1) 求该抛物线的解析式;

(2) 已知过原点的直线与该抛物线交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 右侧), 该抛物线的顶点为 C , 连接 AC, BC , 点 D 在点 A, C 之间的抛物线上运动 (不与点 A, C 重合). 当点 A 的横坐标是 4 时, 若 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle ABD$ 的面积相等, 求点 D 的坐标;

(3) 若直线与抛物线有且只有一个公共点, 且与抛物线的对称轴不平行, 则称该直线与抛物线相切. 已知点 F 的坐标是 $(0, 1)$, 过该抛物线上的任意一点 (除顶点外) 作该抛物线的切线 l , 分别交直线 $y=1$ 和 $y=-3$ 直线于点 P, Q , 求 $FP^2 - FQ^2$ 的值.

28. (10 分) 如图 1, 四边形 $ABCD$ 、 $CEGF$ 都是矩形, 点 G 在 AC 上, 且 $\frac{CG}{AG}=\frac{1}{2}$, $AB=9$, $AD=12$, 小李将矩形 $CEGF$ 绕点 C 顺时针转 α° ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$), 如图 2 所示.

(1) ①他发现 $\frac{AG}{BE}$ 的值始终不变, 请你帮他计算出 $\frac{AG}{BE}$ 的值 = _____.

②在旋转过程中, 当点 B, E, F 在同一条直线上时, 求出 AG 的长度是多少?

(2) 如图 3, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=2\sqrt{5}$, $\angle BAC=\alpha^\circ$, $\tan \angle ABC=\frac{1}{2}$, G 为 BC 的中点, 点 D 为平面内的一个动点且 $DG=\frac{\sqrt{5}}{5}$, 将线段 BD 绕点 D 逆时针旋转 α° , 得到